



Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan buku Matematika Ekonomi dan Bisnis yang secara khusus diperuntukan bagi mahasiswa/i Fakultas Ekonomi. Buku ini disusun dengan mempertimbangkan kurikulum secara umum berlaku pada perguruan-perguruan tinggi, baik perguruan tinggi negeri maupun perguruan tinggi swasta sehingga diharapkan dapat bermanfaat dan memberikan kontribusi baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyampaian pembelajaran khususnya pada mata kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis.

Penulis menyadari keterbatasan buku ini. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati, penulis bersedia menerima kritik dan saran yang positif dan konstruktif dari para pembaca untuk perbaikan kedepan.

Akhir kata penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak RISTEK-DIKTI yang telah memberikan bantuan dana dalam kegiatan Hibah Produk Terapan kepada penulis hingga penulis dapat melakukan penelitian dan membuat buku ajar ini. Semoga dengan bantuan tersebut akan semakin meningkatkan produktivitas penulis dalam penelitian pendidikan matematika, serta kepada seluruh pihak yang memberikan dukungan baik secara moril maupun secara materil dalam penelitian ini.

Bandung, Februari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB 1 MATRIKS.....	1
1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks.....	2
2. Perkalian Skalar dengan Matriks	4
3. Perkalian Matriks	5
4. Matriks-matriks Khusus	5
5. Matriks Transpose (A^T).....	6
6. Kesamaan Dua Matriks	7
7. Determinan Suatu Matriks	7
8. Invers Matriks	11
9. Persamaan Matriks $AX=B$ dan $XA=B$	14
10. Penggunaan Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier	15
BAB 2 FUNGSI LINIER.....	26
1. Persamaan Linier.....	27
1.1. Cara Dwi Koordinat	27
1.2. Cara Koordinat Lereng.....	27
1.3. Cara Penggal Lereng	28
1.4. Cara Dwi Penggal	28
2. Hubungan Dua Buah Garis Lurus	29

2.1. Dua Buah Garis Saling Berimpit.....	29
2.2. Dua Buah Garis Saling Sejajar.....	30
2.3. Dua Buah Garis Saling Berpotongan	30
2.4. Dua Buah Garis Saling Tegak Lurus	31
3. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran Dan Titik Keseimbangan Pasar	32
3.1. Fungsi Permintaan.....	32
3.2. Fungsi Penawaran	33
3.3. Keseimbangan Pasar (Equilibrium)	33
4. Pajak Spesifik, Proporsional, Subsidi, Dan Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang	35
4.1. Pajak Spesifik.....	35
4. 2. Pajak Proporsional	37
4.3. Subsidi.....	40
4.4. Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang	42
5. Fungsi Biaya, Penerimaan, Analisis Bep, Dan Fungsi Anggaran.....	45
5.1. Fungsi Biaya.....	45
5.2. Fungsi Penerimaan.....	47
5.3. Analisis Pulang Pokok (<i>Break Even Point</i>)	48
5.4. Fungsi Anggaran	50
6. Fungsi Konsumsi, Tabungan, Angka Pengganda, Dan Pendapatan Disposabel	53
6.1. Fungsi Konsumsi.....	53
6.2. Fungsi Tabungan.....	53
6.3. Angka Pengganda.....	55
6.4. Pendapatan Disposabel.....	56

7. Fungsi Pajak, Investasi, Impor, Dan Pendapatan Nasional.....	58
7.1. Fungsi Pajak.....	58
7.2. Fungsi Investasi.....	59
7.3. Fungsi Impor	60
7.4. Pendapatan Nasional	61
8. Analisis Is – Lm Dan Keseimbangan Serempak.....	65
8.1. Analisis IS – LM	65
8.2. Keseimbangan Serempak	67
Latihan.....	68
BAB 3 BUNGA SEDERHANA	67
1. Pendahuluan	67
2. Konsep Bunga Sederhana Dan Nilai Waktu Dari Uang	67
3. Manipulasi Persamaan Bunga Sederhana	73
4. Menghitung Jumlah Hari.....	76
5. Pembayaran Dengan Angsuran	81
BAB 4 TINGKAT DISKON DAN DISKON TUNAI	91
1. Diskon Dan Tingkat Diskon.....	91
2. Manipulasi Persamaan Diskon.....	93
3. Wesel.....	96
BAB 5 BUNGA MAJEMUK.....	109
1. Pengertian Bunga Majemuk.....	109
2. Bunga Efektif Dan Bunga Nominal	115
3. Menghitung Nilai Sekarang	116
4. Menghitung Tingkat Bunga Dan Jumlah Periode	118

BAB 1

MATRIKS

Matriks adalah sekumpulan bilangan atau simbol yang disusun menurut baris dan kolom hingga berbentuk persegi. Kumpulan bilangan atau simbol yang terdapat pada suatu matriks biasa disebut dengan **elemen matriks**. Bentuk matriks biasanya menggunakan huruf kapital A,B,C,D, dst, sedangkan elemen matriks biasanya ditulis dengan menggunakan huruf kecil misalnya notasi a_{ij} yang ditafsirkan sebagai elemen matriks a pada baris ke i dan kolom ke j .

Matriks biasanya dinotasikan sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A diatas menyatakan bahwa matriks A terdiri dari m baris dan n kolom. Ukuran m baris dan n kolom biasa ditulis $m \times n$ dan disebut sebagai **ordo matriks**, secara singkat matriks diatas dapat ditulis $A_{m \times n}$.

Contoh :

1. Matriks 2 baris 2 kolom

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 1 kolom ke 2 adalah 6, sedangkan elemen matriks baris ke 2 kolom ke 1 adalah 1.

2. Matriks 2 baris 3 kolom

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 1 kolom ke 2 adalah 4, sedangkan elemen matriks baris ke 2 kolom ke 3 adalah 5

3. Matriks 3 baris 3 kolom

$C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ elemen matriks baris ke 2 kolom ke 2 adalah 7, sedangkan elemen matriks baris ke 3 kolom ke 3 adalah 12

Matriks merupakan materi yang penting untuk dipelajari di ilmu eksak dan sosial, karena melalui matriks berbagai permasalahan matematika dapat ditemukan solusinya misalnya persamaan linier dengan 2 variabel atau lebih.

A. Operasi Dasar Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Matriks hanya dapat dijumlahkan dan dikurangkan, apabila kedua matriks mempunyai **ukuran (ordo) yang sama**, sedangkan elemen matriks yang dijumlahkan dan dikurangkan adalah elemen matriks yang memiliki letak yang sama.

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Penjumlahan Matriks

Apabila matriks A, B, dan C mempunyai ordo yang sama, maka matriks-matriks tersebut mempunyai sifat,

a. $A + B = B + A$ (komutatif)

- b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asosiatif)
- c. Invers penjumlahan A adalah $-A$ jadi $A + (-A) = (-A) + A = O$
- d. Unsur identitas penjumlahan yaitu matriks O , jadi $O + A = A + O = A$

Contoh :

Carilah hasil penjumlahan dan pengurangan dari matriks di bawah ini,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $C + D$
4. $A - C$

Jawab :

$$1. A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2. A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. C + D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

4. $A - C$ tidak dapat dikurangkan, karena matriks A dan C mempunyai ordo yang berbeda.

2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A adalah matriks ordo $m \times n$ dan k suatu skalar, maka matriks $B = kA$ dapat dihitung dengan cara mengalikan semua elemen yang ada pada matriks A dengan bilangan k.

$$B = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \\ ke & kf \end{pmatrix}$$

Contoh :

Jika diketahui $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ dan $B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ hitunglah,

1. $2A$

2. $2A + 3B$

Jawab :

1. $2A = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

2. $2A + 3B = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & 3 & 9 \\ 18 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 11 & 11 \\ 22 & 17 & 15 \end{vmatrix}$

Sifat-sifat Perkalian Skalar dengan Matriks

Semua jenis matriks dapat dikalikan dengan perkalian skalar sehingga berlaku sifat-sifat sebagai berikut,

1. $\alpha_1(A + B) = \alpha_1A + \alpha_1B$

2. $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1A + \alpha_2A$

3. $\alpha_1(\alpha_2A) = (\alpha_1\alpha_2)A$

3. Perkalian Matriks

Perkalian pada matriks A dan B dapat dilakukan apabila jumlah kolom pada matriks A sama dengan jumlah baris pada matriks B. Misalkan matriks $A_{m \times n}$ dan matriks $B_{n \times p}$ maka hasil $A \times B = C_{m \times p}$. Mencari nilai $C_{m \times p}$ dilakukan dengan cara mengalikan tiap baris matriks A dengan tiap kolom matriks B, kemudian hasilnya dijumlahkan dan disimpan pada kolom yang sama.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Perkalian Matriks

Apabila k adalah bilangan real (skalar), matriks A , B , dan C adalah matriks-matriks yang dapat dikalikan, serta matriks B dan C dapat dijumlahkan, maka akan berlaku sifat-sifat perkalian matriks sebagai berikut,

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (asosiatif)
2. $A \times B \neq B \times A$ (tidak komutatif)
3. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ (distributif)
4. $A \times O = O \times A = O$
5. $(kA) \times B = k(A \times B)$
6. $A^2 = A \times A$ $A^n = (A \times A \times A \times \dots \times A)$

4. Matriks-matriks Khusus

a. Matriks Baris

yaitu matriks yang terdiri dari satu baris, misalnya $A = [3 \ 4 \ 5]$

b. Matriks Kolom

yaitu matriks yang terdiri dari satu kolom, misalnya $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks Persegi

yaitu matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolom, misalnya

$J = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks 2 baris dan 2 kolom atau $J_{2 \times 2}$. Bilangan yang terletak pada baris ke-1 kolom ke-1 dan baris ke-2 kolom ke-2 disebut **elemen-elemen diagonal utama**. Pada matriks J disamping, elemen-elemen diagonal utamanya adalah 1 dan 7.

$K = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks 3 baris dan 3 kolom atau $K_{3 \times 3}$. Pada matriks K disamping, elemen-elemen diagonal utamanya adalah 0, 1, dan 0.

d. Matriks Identitas

yaitu matriks persegi dimana semua elemen diagonal utamanya adalah 1 (satu) dan elemen lainnya adalah 0 (nol). Matriks identitas sering ditulis dengan notasi "I".

Contoh :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Transpose (A^T)

yaitu matriks yang mengalami pertukaran elemen, dari baris menjadi kolom dan dari kolom menjadi baris. Akibat dari pertukaran tersebut maka ordo dari matriks akan berubah, misalkan matriks A dengan ordo 3x4 setelah mengalami transpose akan berubah menjadi matriks dengan ordo 4x3.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ matriks transposenya adalah } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama apabila mempunyai ordo yang sama, dengan semua elemen yang seletak mempunyai nilai yang sama.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \text{ maka } A = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & (2+1) \\ (2+2) & 6 \end{bmatrix}, \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2^2 & (2 \times 3) \end{bmatrix} \text{ dapat dikatakan bahwa } A = B = C$$

7. Determinan Suatu Matriks

Determinan suatu matriks dapat dicari dengan beberapa cara, tergantung dari jumlah ordo yang dimiliki oleh matriks tersebut.

a. Determinan Matriks Ordo 2x2

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A| = (a \cdot d - b \cdot c).$$

b. Determinan Matriks Ordo 3x3

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, untuk menghitung determinannya dapat dilakukan dengan 2 metode yaitu metode Sarrus dan metode Minor-Kofaktor.

Metode Sarrus

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ubah bentuk matriks menjadi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

Selanjutnya lakukan perhitungan dengan cara

$$\det A = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \ominus & \ominus & \ominus & \oplus & \oplus & \oplus \end{array}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Jadi dengan menggunakan metode Sarrus matriks dengan ordo 3x3 mempunyai nilai $|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Metode Minor-Kofaktor

Sebelum kita melakukan perhitungan determinan terlebih dahulu kita harus menentukan matriks minor dari setiap elemen, dengan cara menghilangkan setiap elemen-elemen baris ke-i dan kolom ke-j, sehingga diperoleh minor dari elemen i dan j yang biasa ditulis M_{ij} .

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mempunyai 6 minor yaitu,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Setelah minor semua elemen diperoleh, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai kofaktornya dengan menggunakan rumus

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Sehingga diperoleh nilai kofaktor setiap elemen sebagai berikut,

$$K_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Kofaktor dari matriks A berordo 3x3 adalah $\text{kof}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Nilai determinan dari matriks A berordo 3x3 dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan hasil-hasil perkalian elemen-elemen suatu baris atau kolom dengan kofaktornya.

$$\text{Jadi } |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Metode Ekspansi Baris dan Kolom

Misal diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka untuk mencari nilai determinannya adalah sebagai berikut,

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Contoh :

Jika diketahui matriks $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 9 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, carilah nilai determinannya dengan menggunakan metode Sarrus dan metode Ekspansi !

c. Sifat-sifat Determinan Matriks

1. Determinan matriks akan bernilai 0 (nol) apabila terjadi 3 hal yaitu,

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom bernilai **0 (nol)**

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & 6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0$$

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom **sama dengan** elemen pada baris atau kolom lainnya

Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & 6 & 2 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0, \text{ elemen-elemen pada baris ke-1}$$

sama dengan elemen-elemen pada baris ke-3

- Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom merupakan **kelipatan** dari elemen pada baris atau kolom lainnya

Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & 6 & 2 \\ 6 & -16 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0, \text{ elemen-elemen pada baris ke-3}$$

merupakan kelipatan dari elemen-elemen pada baris ke-1

2. $|A^T| = |A|$, A^T adalah transpose dari matriks A
3. $|AB| = |A||B|$
4. $|kA| = kn|A|$, berlaku untuk matriks $A_{n \times n}$ (matriks persegi) dengan k suatu konstanta.
5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, A^{-1} adalah inverse dari matriks A

8. Invers Matriks

a. Pengertian invers matriks :

Jika kita mempunyai 2 buah matriks yaitu

$|A_{n \times n}|$ dan $|B_{n \times n}|$, maka

$|A_{n \times n}|x|B_{n \times n}| = |I_{n \times n}|$ dimana I_n adalah matriks identitas.

Kondisi demikian dapat dikatakan bahwa matriks A dan B saling invers.

Jika matriks mempunyai invers maka matriks adalah **matriks nonsingular**, sebaliknya jika matriks tidak mempunyai invers maka matriks adalah **matriks singular (nilai determinannya = 0)**. Notasi dari invers matriks A adalah $|A^{-1}|$.

b. Mencari Invers Matriks berordo 2x2

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $ad - bc \neq 0$ maka inversnya adalah,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh :

Matriks Nonsingular

Tentukan invers matriks-matriks di bawah ini,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jawab : } |A^{-1}| = \frac{1}{3 \cdot 8 - 7 \cdot 4} \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7/4 \\ 1 & -3/4 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jawab : } |A^{-1}| = \frac{1}{8 \cdot 4 - 2 \cdot 14} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -14 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -14 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ -14/4 & 2 \end{vmatrix}$$

Matriks Singular

Tentukan nilai “x” dari matriks di bawah ini, apabila diketahui matriksnya adalah matriks singular !

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 10x \\ -2x & 40 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Matriks singular adalah matriks yang mempunyai determinan = 0.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 10x \\ -2x & 40 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-8 \cdot 40) - (-20x^2) = 0$$

$$-320 = -20x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{-320}{-20}} = \sqrt{16} = 4$$

c. Mencari Invers Matriks berordo 3x3

Pada pembahasan kali ini invers matriks berordo 3x3 akan dicari dengan cara **adjoin**. Notasi dari adjoin A adalah **adj(A)**. Adjoin merupakan bentuk transpose dari kofaktor elemen-elemen matriks A atau biasa ditulis sebagai berikut,

$$\mathbf{adj(A)} = (\mathbf{kof|A|})^T$$

setelah adjoin diperoleh langkah selanjutnya adalah mencari invers matriks dengan menggunakan rumus,

$$A^{-1} = \frac{\mathbf{adj(A)}}{|A|}$$

Contoh :

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan inversnya !

Jawab :

Langkah 1 : Menentukan determinan matriks A

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 4(8) + 2(4) = 8 - 32 + 8 = -16$$

Langkah 2 : Menentukan kofaktor

$$K_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1^2)(36 - 32) = 4$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1^3)(24 - 16) = -8$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1^4)(16 - 12) = 4$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = (-1^3)(24 - 8) = -16$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1^2)(12 - 4) = 8$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1^5)(8 - 8) = 0$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1^4)(32 - 12) = 20$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1^5)(16 - 8) = -8$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1^6)(12 - 16) = -4$$

Diperoleh nilai kofaktor $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 20 & -8 & -4 \end{vmatrix}$

Langkah 3 : Menentukan adjoint dengan rumus $\text{adj}(A) = (\text{kof}|A|)^T$

$$\text{Adj}(A) = \begin{vmatrix} 4 & -16 & 20 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Langkah 4 : Menentukan invers matriks dengan rumus $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 4 & -16 & 20 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/3 & 8/3 & -10/3 \\ 4/3 & -4/3 & -4/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}$$

d. Sifat-sifat Invers Matriks

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $I^{-1} = I$

9. Persamaan Matriks $AX=B$ dan $XA=B$

- Jika diketahui matriks $AX = B$, maka
 - $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
 - $\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$
 - $\Leftrightarrow (I)X = A^{-1} \cdot B$
 - $\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$
- Jika diketahui matriks $XA = B$, maka

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (XA)A^{-1} &= B \cdot A^{-1} \\ \Leftrightarrow X(AA^{-1}) &= B \cdot A^{-1} \\ \Leftrightarrow X(I) &= B \cdot A^{-1} \\ \Leftrightarrow X &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

10. Penggunaan Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Seperti sudah kita ketahui bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara eliminasi dan substitusi. Adakalanya penyelesaian dengan menggunakan 2 (dua) cara tersebut dirasa terlalu panjang, sehingga kita harus mencoba cara yang lebih singkat misalnya dengan menggunakan matriks.

a. SPL Dua Variabel

Persamaan umum dari persamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut,

$$ax + by = p \dots\dots\dots (1)$$

$$cx + dy = q \dots\dots\dots (2)$$

kedua persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan $AX = B$, dimana matriks

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, oleh karena itu persamaan diatas dapat dicari nilai X dan Y nya dengan menggunakan rumus,

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ \Leftrightarrow X &= A^{-1} \cdot B \\ \Leftrightarrow X &= \frac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix} \quad (\text{dengan syarat } ad-bc \neq 0) \end{aligned}$$

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL dua variabel di bawah ini dengan cara matriks,

$$4X + 2Y = 8$$

$$2X + 6Y = 14$$

Jawab:

1. Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$, dari sini dapat diketahui matriks $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $X = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$. Sehingga nilai X dan Y dapat dicari dengan menggunakan rumus,

$$X = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} B_1 & -A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_2 \\ B_1 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4 \cdot 6 - 2 \cdot 2} \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ 8 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{1}{20} \cdot \begin{vmatrix} 20 \\ 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Jadi nilai X = 1 dan Y = 2.

b. SPL Tiga Variabel

Persamaan umum dari persamaan linier tiga variabel adalah sebagai berikut,

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2 \dots\dots\dots (2)$$

$$a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3 \dots\dots\dots (3)$$

ketiga persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan $AX = B$, dimana matriks

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}, \text{ dan } B = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}, \text{ oleh karena itu persamaan diatas dapat dicari}$$

nilai X, Y, dan Z nya dengan menggunakan rumus $X = A^{-1} B$. Telah kita pelajari bahwa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \text{ (2)}$$

Jadi,

$$A \cdot X = B$$

$$\leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (\text{dengan syarat } |A| \neq 0)$$

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL tiga variabel di bawah ini dengan cara matriks,

$$4X + 2Y - 2Z = 2$$

$$2X + 2Y + 2Z = 12$$

$$2X - 4Y + 2Z = 0$$

Jawab :

1. Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$, dari

sini dapat diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$. Sehingga nilai X, Y, dan Z dapat dicari dengan menggunakan rumus,

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \text{ dengan menggunakan minor-kofaktor diperoleh nilai}$$

determinan,

$$|A| = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 4(12) - 2(0) + (-2)(-12) = 72 \quad |A| = 72$$

Nilai kofaktornya adalah,

$$K_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = (-1^2)(4 + 8) = 12$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^3)(4 - 4) = 0$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = (-1^4)(-8 - 4) = -12$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = (-1^3)(4 - 8) = 4$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^2)(8 + 4) = 12$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = (-1^5)(-16 - 4) = 20$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^4)(4 + 4) = 8$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^5)(8 + 4) = -12$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1^6)(8 - 4) = 4$$

Diperoleh nilai kofaktor $\begin{vmatrix} 12 & 0 & -12 \\ 4 & 12 & 20 \\ 8 & -12 & 4 \end{vmatrix}$

Dicari nilai $\text{adj}(A) = (\text{kof}|A|)^T$

$$\text{Adj}(A) = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ -12 & 20 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ -12 & 20 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ -12 & 20 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \cdot \begin{vmatrix} 72 \\ 144 \\ 216 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Jadi nilai $X = 1$, $Y = 2$, dan $Z = 3$. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2), (3)\}$

c. Penyelesaian SPL dengan cara Determinan

Selain dengan cara matriks seperti yang telah dijelaskan di atas, system persamaan linier dapat juga diselesaikan dengan cara determinan.

- SPL Dua Variabel

Persamaan umum dari persamaan linier dua variabel adalah sebagai berikut,

$$ax + by = p \dots\dots\dots (1)$$

$$cx + dy = q \dots\dots\dots (2)$$

kedua persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan $AX = B$, dimana matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

oleh karena itu persamaan diatas dapat dicari nilai X dan Y nya dengan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Mencari determinan X dan Y berdasarkan elemen-elemen pada matriks A , dengan menggunakan rumus,

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. Mencari D_x dengan cara mengganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq$$

3. Mencari D_y dengan cara mengganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc$$

4. Menentukan nilai X dan Y dengan menggunakan rumus,

$$X = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad Y = \frac{D_y}{D}$$

Contoh :

Buatlah penyelesaian SPL dua variabel di bawah ini dengan cara matriks,

$$4X + 2Y = 8$$

$$2X + 6Y = 14$$

Jawab :

1. Buat persamaan menjadi bentuk matriks $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \\ 14 \end{vmatrix}$

Langkah 1:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20$$

Langkah 2 :

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 14 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 28 = 20$$

Langkah 3 :

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 56 - 16 = 40$$

Langkah 4 :

$$X = \frac{20}{20} = 1 \quad \text{dan} \quad Y = \frac{40}{20} = 2$$

Jadi nilai $X = 1$ dan $Y = 2$. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2)\}$.

- **SPL Tiga Variabel**

Persamaan umum dari persamaan linier tiga variabel adalah sebagai berikut,

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2 \dots\dots\dots (2)$$

$$a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3 \dots\dots\dots (3)$$

ketiga persamaan diatas dapat disusun ke dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

bentuk dari persamaan di atas sama dengan persamaan $AX = B$, dimana matriks

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}, \text{ dan } B = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}, \text{ oleh karena itu}$$

persamaan diatas dapat dicari nilai X, Y, dan Z nya dengan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Mencari determinan X, Y, dan Z berdasarkan elemen-elemen pada matriks A, dengan menggunakan rumus,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

2. Mencari D_x dengan cara mengganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. Mencari D_y dengan cara mengganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

4. Mencari D_z dengan cara mengganti kolom ke-3 dengan elemen-elemen matriks B sehingga menjadi,

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

5. Menentukan nilai X, Y, dan Z dengan menggunakan rumus,

$$X = \frac{D_x}{D} ; Y = \frac{D_y}{D} ; Z = \frac{D_z}{D}$$

Buatlah penyelesaian SPL tiga variabel di bawah ini dengan cara matriks,

$$4X + 2Y - 2Z = 2$$

$$2X + 2Y + 2Z = 12$$

$$2X - 4Y + 2Z = 0$$

Jawab :

1. Persamaan dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$, dari sini dapat diketahui matriks $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$, dan $D = \begin{vmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{vmatrix}$. Sehingga nilai determinan X, Y, dan Z dapat dicari dengan menggunakan,

Langkah 1 :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$|D| = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|D| = 4(12) - 2(0) + (-2)(-12) = 72 |D| = 72$$

Langkah 2 :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 2(12) - 2(24) - 2(-48) = 24 - 48 + 96 = 72$$

Langkah 3 :

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 4(24) - 2(0) - 2(-24) = 96 + 48 = 144$$

Langkah 4 :

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 12 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 4(48) - 2(-24) + 2(-12) = 192 + 48 - 24 = 216$$

Langkah 5 :

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{72}{72} = 1$$

$$Y = \frac{D_y}{D} = \frac{144}{72} = 2$$

$$Z = \frac{D_z}{D} = \frac{216}{72} = 3$$

Jadi nilai $X = 1$, $Y = 2$, dan $Z = 3$. Himpunan penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $\{(1), (2), (3)\}$.

BAB 2

FUNGSI LINIER

Bentuk fungsi dalam matematika dapat digunakan untuk mencari hubungan sebab akibat antara berbagai variabel ekonomi misalnya hubungan antara investasi dan tingkat bunga. Dari berbagai macam hubungan fungsional yang ada dalam matematika, hubungan linier merupakan bentuk yang paling sering digunakan dalam analisis ekonomi.

1. Persamaan Linier

Persamaan linier dapat dibentuk dengan berbagai macam cara (tergantung dari data yang tersedia), du Mairy (2003, 79) membaginya menjadi empat cara yaitu :

- Cara dwi koordinat
- Cara koordinat lereng
- Cara penggal lereng
- Cara dwi penggal

1.1. Cara Dwi Koordinat

Persamaan linier dibentuk dari dua buah titik, misalnya diketahui titik A (x_1, y_1) dan titik B(x_2, y_2) maka rumus untuk mencari persamaan liniernya adalah,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh : Jika diketahui titik A berkoordinat (4,6) dan titik B berkoordinat (12,10) maka persamaan liniernya adalah,

$$\frac{y - 6}{10 - 6} = \frac{x - 4}{12 - 4}$$
$$\frac{y - 6}{4} = \frac{x - 4}{8}$$

$$8y - 48 = 4x - 16$$

$$8y = 4x + 32$$

$$y = 0,5x + 4$$

1.2. Cara Koordinat Lereng

Dari sebuah titik dan suatu kemiringan dapat dibentuk persamaan linier yang memenuhi titik dan kemiringan tersebut, misalnya diketahui titik A (x_1, y_1) dan kemiringan garisnya "b" maka rumus persamaan liniernya adalah,

$$y - y_1 = b (x - x_1)$$

Contoh : Diketahui titik A(4,6) dengan kemiringan garis 1, maka persamaan liniernya adalah :

$$y - 6 = 1 (x - 4)$$

$$y = x + 2$$

1.3. Cara Penggal Lereng

Data yang diperlukan untuk mencari persamaan linier dengan cara penggal adalah penggal pada salah satu sumbu dan kemiringan garis yang memenuhi persamaan. Rumus yang digunakan adalah :

$$y = a + bx$$

Ket : a = penggal : b = kemiringan

Contoh : Jika diketahui penggal dan kemiringan garis $y = f(x)$ adalah 4 dan 2, maka persamaan liniernya adalah $y = 4 + 2x$.

1.4. Cara Dwi Penggal

Persamaan linier dapat juga dibentuk dengan mengetahui penggal garis tersebut pada masing-masing sumbu. Sumbu vertikal ketika $x = 0$ dan sumbu horizontal ketika $y = 0$. Jika dimisalkan dari sebuah garis lurus penggal pada sumbu vertikal adalah a dan penggal pada sumbu horisontal adalah c, maka persamaan liniernya adalah :

$$y = a - \frac{a}{c}x$$

Contoh : Jika penggal sebuah garis lurus pada sumbu vertikal adalah 2 dan sumbu horisontal adalah -4, maka persamaan liniernya adalah :

$$y = 2 - \frac{2}{(-4)}x$$

$$y = 2 + 0,5x$$

Lereng sebuah garis lurus adalah hasil bagi selisih antara dua ordinat ($y_2 - y_1$) terhadap selisih antara dua absis ($x_2 - x_1$). Rumus persamaan liniernya adalah sbb,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Rumus hubungan linier menurut cara koordinat lereng adalah,

$$y - y_1 = b(x - x_1)$$

dimana rumus untuk mencari nilai “b” adalah sbb,

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Hubungan Dua Buah Garis Lurus

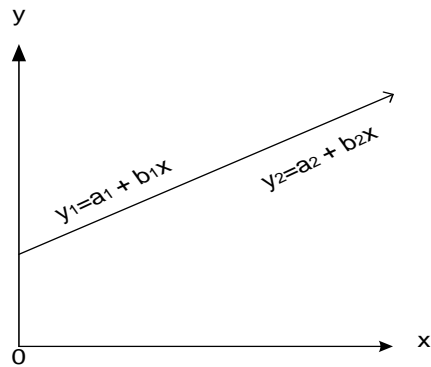
Dua buah garis lurus akan mempunyai empat macam kemungkinan bentuk hubungan yaitu,

- 2.1. Garis saling berimpit
- 2.2. Garis saling sejajar
- 2.3. Garis saling berpotongan
- 2.4. Garis saling berpotongan tegak lurus

2.1. Dua Buah Garis Saling Berimpit

Dua buah garis akan saling berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari persamaan garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $y_1 = ny_2$; $a_1 = na_2$; $b_1 = nb_2$

Gambar :

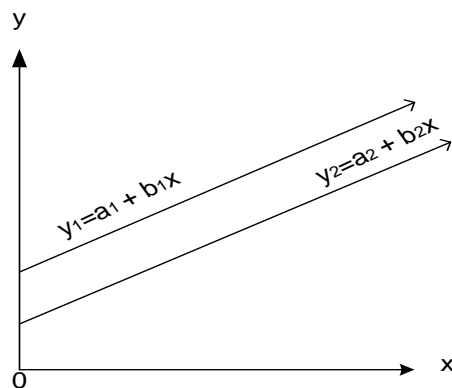


Syarat berimpit
 $y_1 = ny_2 ; a_1 = na_2 ; b_1 = nb_2$

2.2. Dua Buah Garis Saling Sejajar

Dua buah garis akan saling sejajar apabila lereng garis yang satu sama dengan lereng garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan sejajar dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $a_1 \neq a_2$ dan $b_1 = b_2$

Gambar :

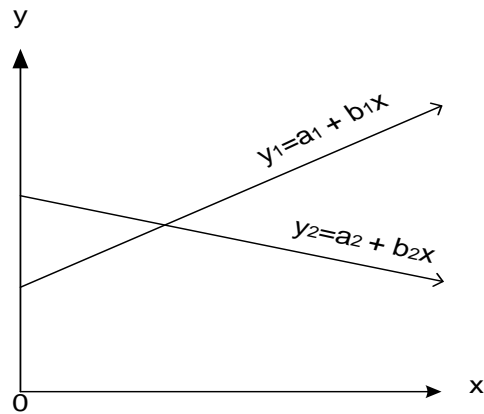


Syarat sejajar
 $a_1 \neq a_2$ dan $b_1 = b_2$

2.3. Dua Buah Garis Saling Berpotongan

Dua buah garis akan saling berpotongan apabila lereng garis yang satu tidak sama dengan lereng garis yang lain. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $b_1 \neq b_2$.

Gambar :

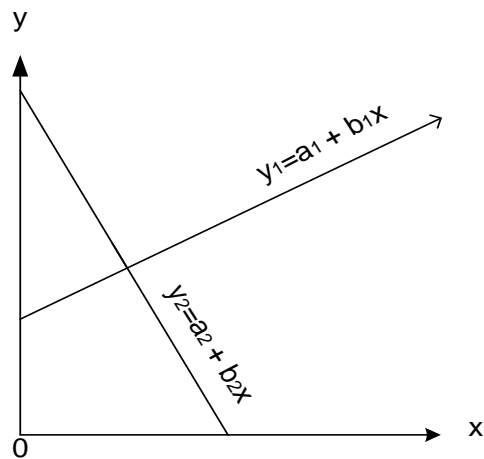


Syarat berpotongan
 $b_1 \neq b_2$

2.4. Dua Buah Garis Saling Tegak Lurus

Dua buah garis akan saling tegak lurus apabila lereng garis yang satu kebalikan dari lereng garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Artinya persamaan garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan tegak lurus dengan persamaan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ apabila $b_1 = -1/b_2$ atau $b_1 \cdot b_2 = -1$.

Gambar :



Syarat tegak lurus
 $b_1 = -1/b_2$ atau
 $b_1 \cdot b_2 = -1$

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Bentuklah persamaan linier yang garisnya melalui pasangan titik-titik berikut,
 - (a) (-1,4) dan (1,0)
 - (b) (-1,-2) dan (-5,-2)

(c) (0,0) dan (1,5)

(d) (1,4) dan (2,3)

2. Bentuklah persamaan linier yang garisnya melalui titik (-1,3) dan mempunyai koefisien arah atau lereng sebesar,

(a) -1

(b) 2

(c) 5

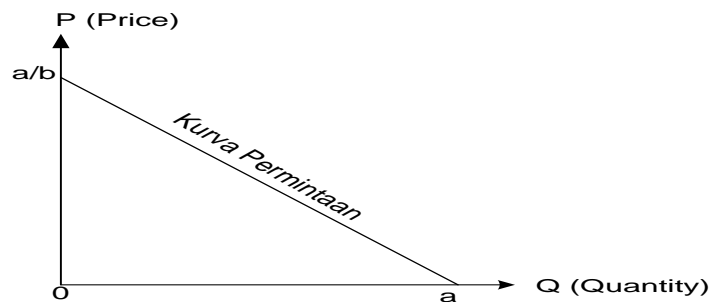
(d) 0

3. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran Dan Titik Keseimbangan Pasar

3.1. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan menghubungkan antara variabel harga (P) dan variabel jumlah (Q) yang diminta. Bentuk umum dan kurva dari fungsi permintaan adalah sebagai berikut,

$$Q = a - bP \quad \text{atau} \quad P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q$$

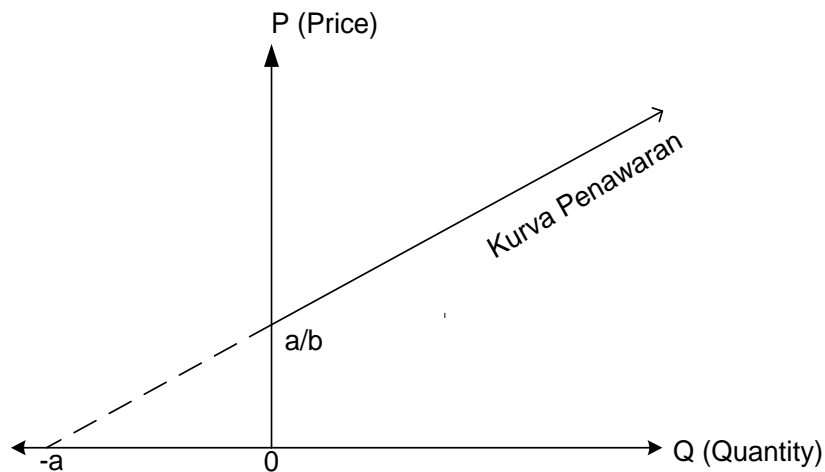


Melihat bentuk persamaan dan kurva di atas terlihat bahwa variabel P dan Q mempunyai tanda yang berlawanan. *Hal ini sesuai dengan hukum permintaan yang menyatakan bahwa apabila harga naik maka jumlah yang diminta (dipesan) akan berkurang, begitu pula sebaliknya apabila harga turun maka jumlah yang diminta akan bertambah.*

3.2. Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran menghubungkan antara variabel harga dan variabel jumlah yang ditawarkan. Bentuk umum dan kurva dari fungsi permintaan adalah sebagai berikut,

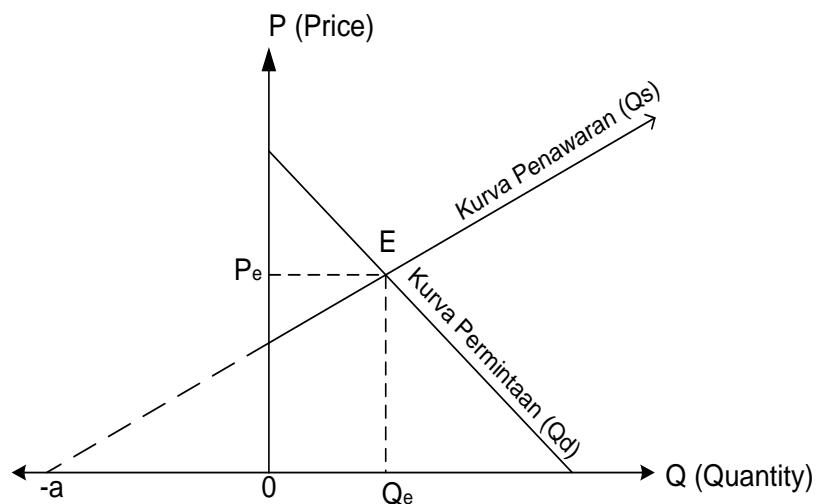
$$Q = -a + bP \quad \text{atau} \quad P = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}Q$$



3.3. Keseimbangan Pasar (Equilibrium)

Keseimbangan pasar tercapai apabila jumlah barang yang diminta sama dengan jumlah barang yang ditawarkan di pasaran. Secara matematik persamaan dan kurva keseimbangan pasar adalah sebagai berikut,

$$Q_d = Q_s$$



Keterangan :

Q_d : jumlah permintaan

Q_s : jumlah penawaran

- E : titik keseimbangan
- P_e : harga keseimbangan
- Q_e : jumlah keseimbangan

Contoh 1 :

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 15 - Q$, sedangkan fungsi penawarannya $P = 3 + 0,5 Q$. Berapa harga dan jumlah barang agar keseimbangan pasar dapat tercipta ? Tunjukkan keseimbangan pasar yang diperoleh dalam bentuk kurva!

Jawab :

Permintaan : $P = 15 - Q \quad \rightarrow \quad Q = 15 - P$

Penawaran : $P = 3 + 0,5 Q \quad \rightarrow \quad Q = -6 + 2P$

Keseimbangan pasar dapat tercipta apabila $Q_d = Q_s$

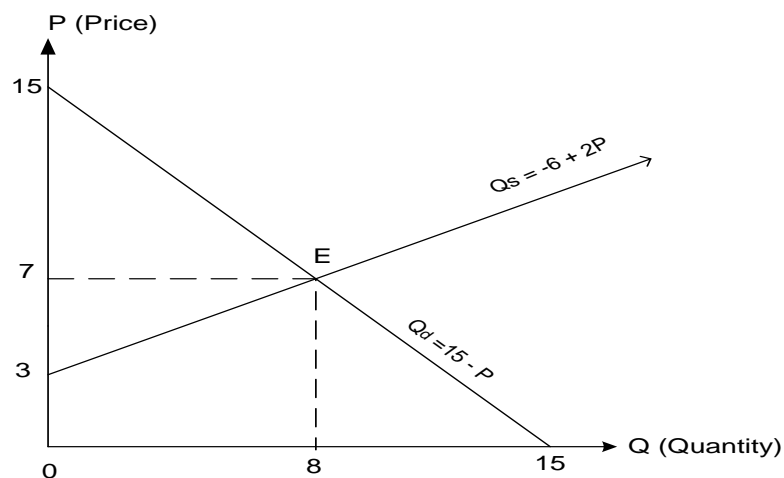
$$15 - P = -6 + 2P$$

$$- 3P = -21$$

$$P = 7$$

$$Q = 15 - P = 15 - 7 = 8$$

Jadi keseimbangan pasar akan tercipta apabila $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Fungsi permintaan dan penawaran dari suatu barang ditunjukkan oleh persamaan berikut,

$$Q_d = 6 - 0,75 P$$

$$Q_s = -5 + 2 P$$

- a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar ?
 - b. Tunjukkan keseimbangan pasar tersebut dalam bentuk grafik !
2. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh $P_d = 6 - 2 Q$ dan fungsi penawarannya adalah $P_s = 12 + Q$.
- a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar ?
 - b. Tunjukkan keseimbangan pasar tersebut dalam bentuk grafik !

4.Pajak Spesifik, Proporsional, Subsidi, Dan Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang

4.1. Pajak Spesifik

Pengaruh pajak yang dikenakan atas penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang menjadi naik. Hal tersebut terjadi karena produsen akan mengalihkan sebagian pajak kepada konsumen, yaitu dengan cara menawarkan harga jual yang lebih tinggi. Akibat pengenaan pajak menyebabkan harga keseimbangan pasar menjadi lebih tinggi bila dibandingkan dengan harga keseimbangan pasar sebelum dikenai pajak.

Pengenaan pajak sebesar “t” atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan kurva penawaran bergeser ke atas. Jika sebelum pajak persamaan penawaran $P = a + bQ$ maka sesudah ada pajak menjadi $P = (a + t) + bQ$.

Contoh 2 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan pajak sebesar 3 per unit. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pajak sebelum dan sesudah terkena pajak? Tunjukkan pula dalam bentuk kurva !

Jawab :

- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum terkena pajak telah dihitung pada contoh 1, yaitu $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$.

❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak sebesar 3 per unit adalah,

Penawaran sebelum pajak : $P = 3 + 0,5 Q$

Penawaran setelah pajak : $P = 3 + 3 + 0,5 Q \rightarrow Q = -12 + 2 P$

Persamaan permintaan : $P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$

Keseimbangan pasar setelah terkena pajak,

$$Q_d = Q_s$$

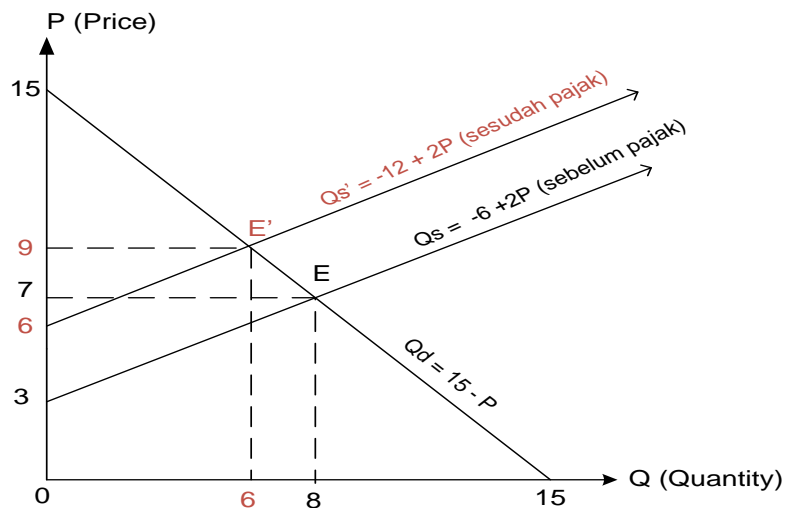
$$15 - P = -12 + 2P$$

$$-3P = -27$$

$$P = 9$$

$$Q = 15 - P = 15 - 9 = 6$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak adalah $P_e' = 9$ dan $Q_e' = 6$.



Beban pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dan sebelum pajak atau,

$$tk = P_e' - P_e$$

Beban pajak yang ditanggung oleh produsen (tp) adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang (t) dan besar pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) atau,

$$tp = t - tk$$

Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah terkena pajak (Q_e') dengan besarnya pajak per unit barang (t) atau,

$$T = Q_e' \times t$$

dalam contoh 2 besar pajak yang ditanggung konsumen adalah sebesar $tk = 9 - 7 = 2$. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen harus menanggung pajak sebesar 2 per unit sedangkan pajak yang ditanggung produsen 1 per unit. Sedangkan jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah adalah $6 \times 3 = 18$.

4. 2. Pajak Proporsional

Pajak proporsional ialah pajak yang besarnya ditetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual. Meskipun pengaruhnya sama dengan pengaruh pajak spesifik yaitu menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi jumlah keseimbangan pasar, namun analisisnya agak berbeda.

Jika persamaan penawaran sebelum pajak $P = a + bQ$, maka setelah dikenakan pajak proporsional sebesar “t %” persamaan penawaran menjadi,

$$P = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1-t)} Q \text{ atau } P = \frac{a}{1-t} + \frac{bQ}{1-t}$$

Contoh 3 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar 25% dari harga jual. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak, serta buatlah kurvanya !

Jawab :

- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum terkena pajak telah dihitung pada contoh 1, yaitu $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$.
- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak sebesar $t = 25\% = 0,25$ adalah,

Penawaran sebelum pajak : $P = 3 + 0,5 Q$

Penawaran setelah pajak : $P = 3 + 0,5 Q + 0,25 P$

$$P = 4 + \frac{2}{3} Q \longrightarrow Q = -6 + 1,5 P$$

Persamaan permintaan : $P = 15 - Q \longrightarrow Q = 15 - P$

Keseimbangan pasar setelah terkena pajak,

$$Q_d = Q_s$$

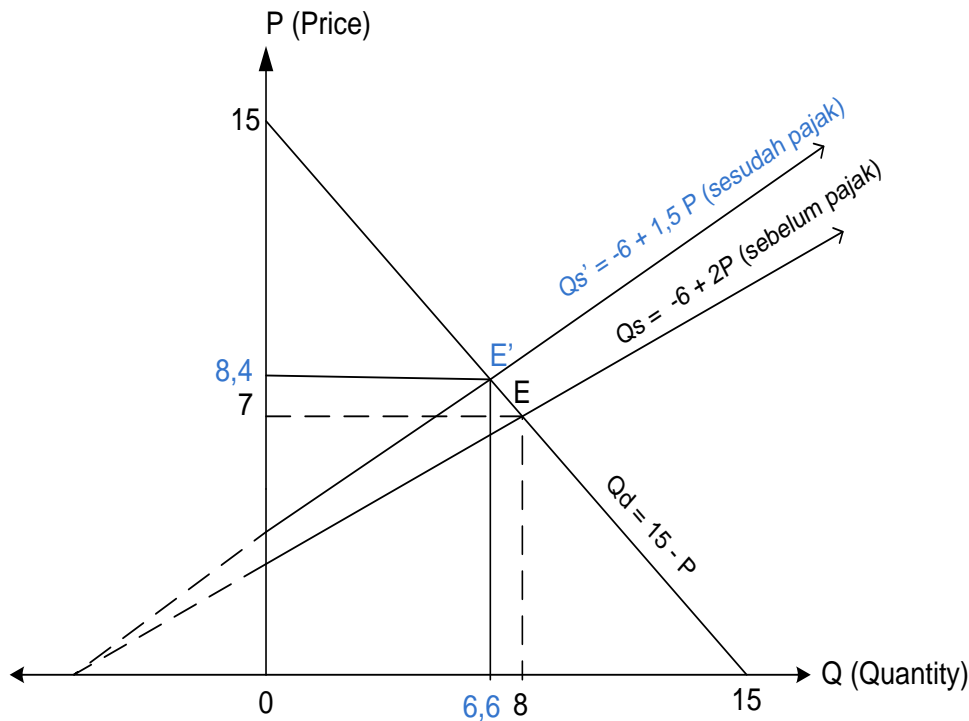
$$15 - P = -6 + 1,5P$$

$$-2,5P = -21$$

$$P = 8,4$$

$$Q = 15 - P = 15 - 8,4 = 6,6$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah terkena pajak proporsional adalah $P_e' = 8,4$ dan $Q_e' = 6,6$.



Beban pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) adalah selisih antara harga keseimbangan sesudah pajak dan sebelum pajak atau,

$$tk = P_e' - P_e$$

Beban pajak yang ditanggung oleh produsen (tp) adalah selisih antara besarnya pajak per unit barang (t) dan besar pajak yang ditanggung oleh konsumen (tk) atau,

$$tp = t - tk$$

Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah (T) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah terkena pajak (Q_e') dengan besarnya pajak per unit barang (t) atau,

$$T = Q_e' \times t$$

Besar pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah

$$t \times P_e'$$

dalam contoh 3 diperoleh hasil sebagai berikut,

1. Besar pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit barang adalah $0,25 \times 8,4 = 2,1$
2. Besar pajak yang ditanggung konsumen adalah sebesar $t_k = 8,4 - 7 = 1,4$. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen harus menanggung pajak sebesar 1,4 per unit.
3. Besar pajak yang ditanggung produsen $t_p = 2,1 - 1,4 = 0,7$ per unit.
4. Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah adalah $6,6 \times 2,1 = 13,86$.

4.3. Subsidi

Subsidi sering dikatakan sebagai pajak negatif karena merupakan kebalikan dari pajak, pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar merupakan kebalikan dari pajak oleh karena itu cara menganalisisnya sama dengan menganalisis pengaruh pajak. Subsidi dapat bersifat spesifik dapat pula bersifat proporsional.

Pengaruh subsidi menyebabkan harga jual barang menjadi lebih rendah, akibatnya harga keseimbangan pasar menjadi lebih rendah tapi jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak. Apabila diberikan subsidi spesifik sebesar "s" maka persamaan penawaran yang semula $P = a + bQ$ setelah memperoleh subsidi menjadi,

$$P' = (a - s) + bQ$$

Contoh 4 :

Apabila soal pada contoh 1 dikenakan subsidi oleh pemerintah sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan setelah subsidi, serta buatlah kurvanya !

Jawab :

- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum mendapat subsidi telah dihitung pada contoh 1, yaitu $P_e = 7$ dan $Q_e = 8$.
- ❖ Harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi sebesar 1,5 atas setiap unit barang yang diproduksi adalah,

$$\text{Penawaran sebelum subsidi} : P = 3 + 0,5 Q$$

$$\text{Penawaran setelah subsidi} : P = 3 + 0,5 Q + 1,5$$

$$P = 1,5 + 0,5Q \rightarrow Q = -3 + 2P$$

$$\text{Persamaan permintaan} : P = 15 - Q \rightarrow Q = 15 - P$$

Keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi,

$$Q_d = Q_s$$

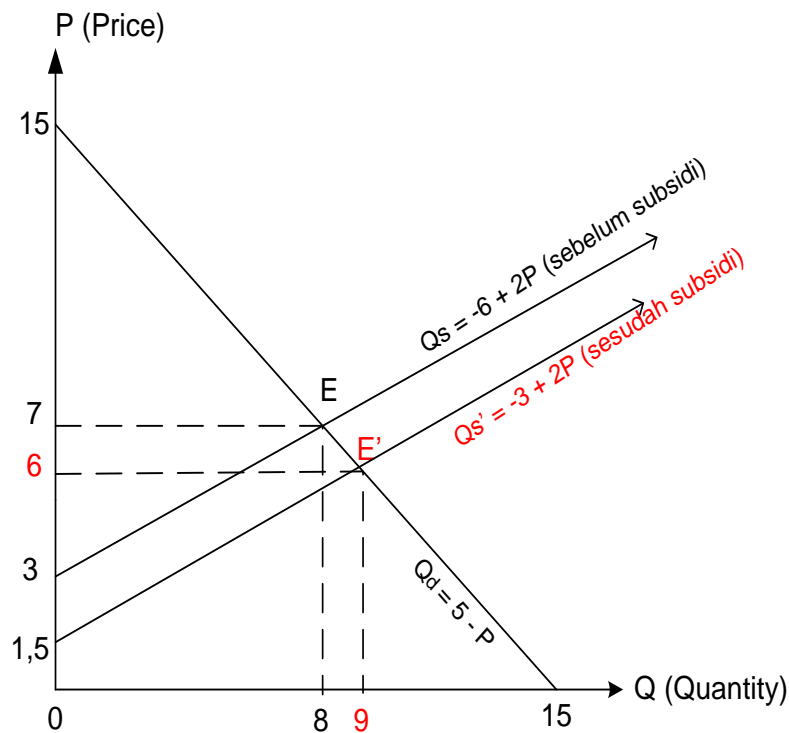
$$15 - P = -3 + 2P$$

$$-3P = -18$$

$$P = 6$$

$$Q = 15 - P = 15 - 6 = 9$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan pasar setelah mendapat subsidi adalah $P_e' = 6$ dan $Q_e' = 9$.



Subsidi yang diterima secara tidak langsung oleh konsumen (sk) adalah selisih antara harga keseimbangan tanpa subsidi (P_e) dan harga keseimbangan dengan subsidi (P_e') atau,

$$S_k = P_e - P_e'$$

Subsidi yang diterima produsen (sp) adalah selisih antara besarnya subsidi per unit barang (s) dan bagian subsidi yang diterima konsumen (sk) atau,

$$s_p = s - s_k$$

Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah (S) adalah perkalian antara jumlah barang yang terjual sesudah subsidi (Q_s') dengan besarnya subsidi per unit barang (s) atau,

$$S = Q_s' \times s$$

dalam contoh 4 diperoleh hasil sebagai berikut,

1. Besar subsidi yang diterima konsumen adalah sebesar $s_k = 7 - 6 = 1$. Artinya dari setiap unit barang yang dibeli, konsumen menerima sebesar 1 per unit.
2. Besar subsidi yang diterima produsen $s_p = 1,5 - 1 = 0,5$ per unit.
3. Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah adalah $S = 9 \times 1,5 = 13,5$.

4.4. Keseimbangan Pasar Kasus Dua Macam Barang

Persamaan fungsi permintaan yang berbentuk $Q = a - bP$ mencerminkan hubungan fungsional antara jumlah permintaan dan harga dari satu jenis barang. Fungsi tersebut menunjukkan seolah-olah tidak ada faktor lain yang mempengaruhi jumlah permintaan selain faktor harga saja, padahal dalam kehidupan sehari-hari ada barang-barang tertentu yang sifat permintaannya tidak hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri, tetapi juga dipengaruhi oleh faktor lain. Barang-barang semacam ini adalah barang-barang yang mempunyai hubungan “substitutif (saling menggantikan)” dan barang yang mempunyai hubungan “komplementer (saling melengkapi).

Jika barang X dan Y mempunyai hubungan penggunaan, permintaan akan masing-masing barang dipengaruhi juga oleh harga barang lainnya maka fungsi permintaan akan masing-masing barang tersebut adalah,

$$Q_{dx} = f(P_x, P_y) \qquad Q_{dx} \quad : \text{jumlah permintaan barang X}$$

$$Q_{dy} = g(P_y, P_x) \qquad Q_{dy} \quad : \text{jumlah permintaan barang Y}$$

$$P_x \quad : \text{harga barang X per unit}$$

$$P_y \quad : \text{harga barang Y per unit}$$

karena permintaan akan masing-masing barang merupakan fungsi dari harga dua macam barang, maka keseimbangan pasar yang tercipta adalah keseimbangan pasar untuk kedua macam barang tersebut sehingga analisis dapat dilakukan secara bersamaan.

Contoh 5 :

Permintaan akan barang X ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dx} = 10 - 4P_x + 2P_y$, sedangkan penawarannya $Q_{sx} = -6 + 6P_x$. Sedangkan untuk barang Y permintaannya ditunjukkan oleh persamaan $Q_{dy} = 9 - 3P_y + 4P_x$ dan penawarannya $Q_{sy} = -3 + 7P_y$. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar untuk masing-masing barang tersebut !

Jawab :

❖ Keseimbangan pasar barang X,

$$Q_{dx} = Q_{sx}$$

$$10 - 4P_x + 2P_y = -6 + 6P_x$$

$$10 P_x - 2 P_y = 16 \dots\dots\dots \text{(pers 1)}$$

❖ Keseimbangan pasar barang Y,

$$Q_d = Q_s$$

$$9 - 3P_y + 4P_x = -3 + 7P_y$$

$$4P_x - 10P_y = -12 \dots\dots\dots \text{(pers 2)}$$

❖ Pers (1) dan pers (2)

$$\begin{array}{r|l} 10P_x - 2P_y = 16 & |x \quad 1| \quad 10P_x - 2P_y = 16 \\ 4P_x - 10P_y = -12 & |x \quad 2,5| \quad 10P_x - 25P_y = -30 \end{array}$$

$$23P_y = 46$$

$$P_y = 2$$

dengan memasukkan $P_y = 2$ ke salahsatu persamaan diperoleh nilai $P_x = 2$. Nilai Q_x dan Q_y dapat diperoleh dengan memasukkan nilai P_x dan P_y kedalam persamaan permintaan atau persamaan penawaran masing-masing barang. Dari hasil perhitungan diperoleh nilai $P_x \text{ equilibrium} = 2$, $P_y \text{ equilibrium} = 2$, $Q_x \text{ equilibrium} = 6$, $Q_y \text{ equilibrium} = 11$.

Catatan : Metode ini dapat diterapkan pada kasus-kasus lebih dari dua macam barang.

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Jika fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh $P = 15 - Q$ dan fungsi penawaran $P = 0,5Q + 3$. Terhadap produk tersebut dikenakan pajak oleh pemerintah sebesar Rp. 3,- per unit.
 - a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak ?
 - b. Berapa besar penerimaan pajak total oleh pemerintah ?
 - c. Berapa besar pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen ?
 - d. Gambarkan harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan setelah pajak dalam satu grafik !
2. Fungsi permintaan suatu produk ditunjukkan oleh $P = 15 - Q$ dan fungsi penawaran $P = 0,5Q + 3$. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 1,5 per unit produk,
 - a. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan sebelum dan sesudah subsidi ?

- b. Berapakah besar subsidi yang diberikan oleh pemerintah ?
- c. Berapakah besar subsidi yang diterima oleh konsumen dan produsen ?
- d. Gambarkan dalam satu grafik !
3. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk adalah sebagai berikut,

$$Q_{dx} = 5 - 2P_x + P_y \quad ; \quad Q_{dy} = 6 + P_x - P_y$$

dan

$$Q_{sx} = -5 + 4P_x - P_y \quad ; \quad Q_{sy} = -4 - P_x + 3P_y$$

Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasarnya !

5. Fungsi Biaya, Penerimaan, Analisis Bep, Dan Fungsi Anggaran

5.1. Fungsi Biaya

Biaya total (*total cost*) yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dalam operasi bisnisnya terdiri atas biaya tetap (*fixed cost*). Sesuai dengan namanya, sifat biaya tetap adalah tidak tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Berapa unitpun barang yang dihasilkan, jumlah biaya tetap dalam jangka pendek senantiasa tidak berubah. Secara matematik, biaya tetap bukan merupakan fungsi dari jumlah barang dihasilkan tetapi merupakan sebuah konstanta, dan kurvanya berupa sebuah garis lurus sejajar sumbu jumlah. Sebaliknya biaya variabel tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Semakin banyak jumlah barang yang dihasilkan semakin besar pula biaya variabelnya. Secara matematik biaya variabel merupakan fungsi dari jumlah barang yang dihasilkan, kurvanya berupa sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$FC = k$$

$$VC = f(Q) = vQ$$

$$C = g(Q) = FC + VC = k + vQ$$

Keterangan :

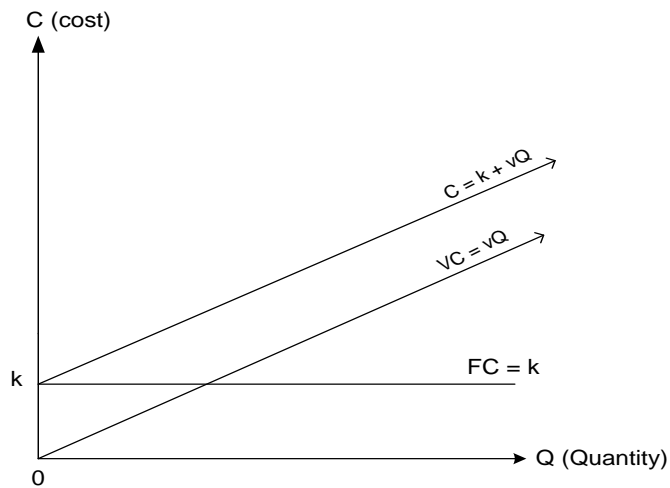
FC : biaya tetap

VC : biaya variabel

C : biaya total

k : konstanta

v : lereng kurva VC dan kurva C



Contoh 6 :

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan sebesar Rp. 20.000,- sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan $VC = 100Q$.

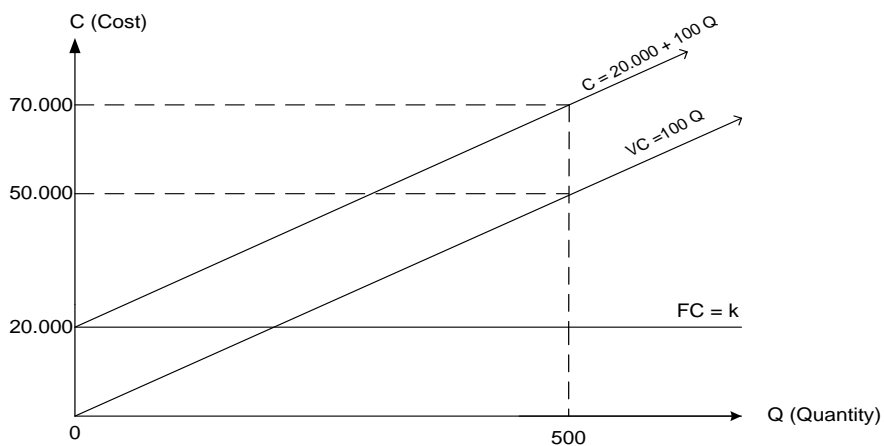
- Tunjukkan persamaan dan kurva biaya totalnya!
- Berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 500 unit barang ?

Jawab :

$$\left. \begin{array}{l} FC = 20.000 \\ VC = 100 Q \end{array} \right\} C = FC + VC \rightarrow C = 20.000 + 100 Q$$

Jika $Q = 500$, maka $C = 20.000 + 100 (500) = 70.000$

a. Kurva :



- Jadi perusahaan harus mengeluarkan biaya total sebesar Rp. 70.000,0 untuk memproduksi 500 unit barang.

5.2. Fungsi Penerimaan

Penerimaan sebuah perusahaan dari hasil penjualan barang merupakan fungsi dari jumlah barang yang terjual atau dihasilkan. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual semakin besar pula penerimaannya. Penerimaan total (*total revenue*) adalah hasil kali jumlah barang yang terjual dengan harga jual per unit barang tersebut. Secara matematik, penerimaan merupakan fungsi jumlah barang kurvanya berupa garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

$$R = Q \times P = f(Q)$$

dalam menganalisis penerimaan selalu dianggap bahwa perusahaan senantiasa berhasil menjual setiap barang yang dihasilkannya, dengan demikian Q dalam $R = f(Q)$ bukan saja melambangkan jumlah barang dihasilkan tetapi juga melambangkan jumlah barang yang terjual.

Contoh 7 :

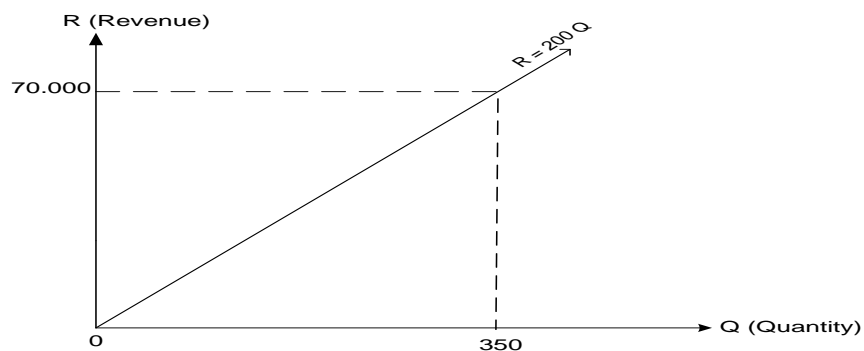
Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp. 200,- per unit.

- Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan tersebut !
- Berapa besar penerimaannya bila terjual barang sebanyak 350 unit ?

Jawab :

$$\begin{aligned} R &= Q \times P \\ &= Q \times 200 = 200 Q \end{aligned}$$

a. Kurva :

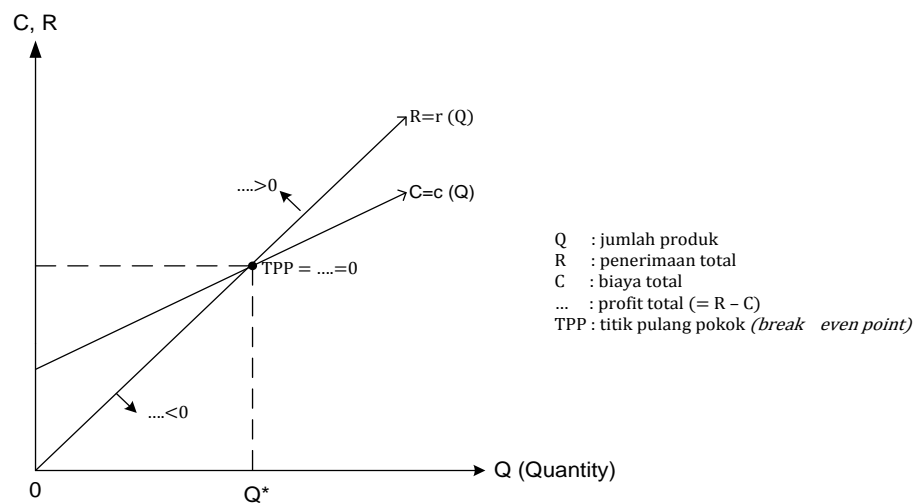


b. Bila $Q = 350$, maka $R = 200 \times 350 = 70.000$

5.3. Analisis Pulang Pokok (*Break Even Point*)

Penerimaan dan biaya merupakan variabel-variabel penting untuk mengetahui kondisi bisnis suatu perusahaan. Bila diketahui penerimaan total (R) yang diperoleh dari biaya total (C) yang dikeluarkan, maka dapat dianalisis apakah perusahaan mendapat keuntungan atau mengalami kerugian. Keuntungan (profit positif, $\dots > 0$) akan didapat bila $R > C$, secara grafik hal ini terlihat pada area dimana kurva R terletak di atas kurva C. Sebaliknya kerugian (profit negatif, $\dots < 0$) akan didapat bila $R < C$, secara grafik hal ini terlihat pada area dimana kurva R terletak di bawah kurva C.

Konsep yang lebih penting berkenaan dengan R dan C adalah konsep “pulang pokok (break even point)” yaitu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok (profit nol, $\dots = 0$) terjadi apabila $R = C$, artinya perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula merugi. Secara grafik hal ini ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan C.



Q^* mencerminkan posisi tingkat produksi/penjualan pulang pokok. Area disebelah kanan Q^* merupakan area keuntungan ($\dots > 0$) sedangkan di sebelah kiri Q^* merupakan area kerugian ($\dots < 0$).

Contoh 8 :

Bila biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C=20.000+100Q$ dan penerimaan totalnya $R = 200Q$. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi pulang pokok ? Apa yang terjadi jika perusahaan tersebut berproduksi sebanyak 300 unit ?

Jawab :

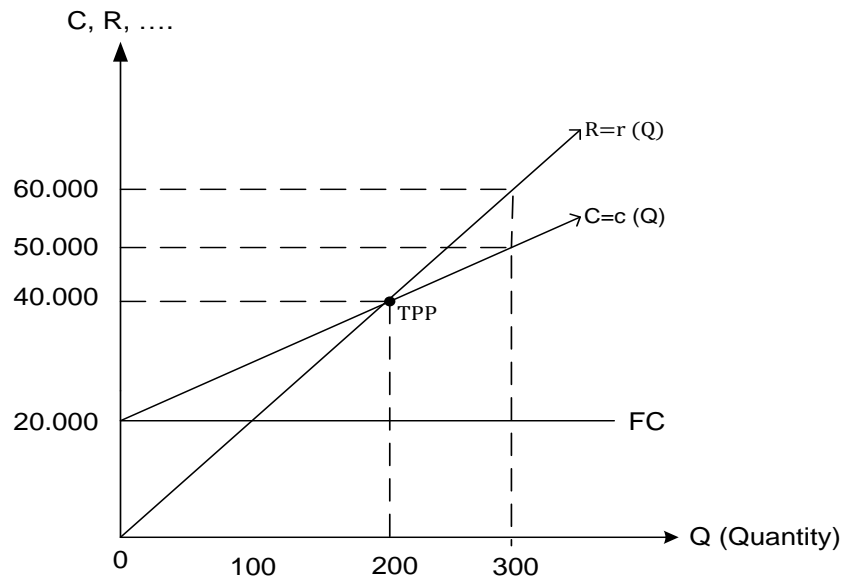
Kondisi pulang pokok akan terjadi apabila $\dots = 0$, dimana nilai $\dots = R - C$. Artinya $R - C = 0$ atau $R = C$.

$$R = C$$

$$200Q = 20.000 + 100Q$$

$$100Q = 20.000$$

$$Q = 200$$



Jika $Q = 300$ unit maka,

$$R = 200(300) = 60.000;$$

$$C = 20.000 + 100(300) = 50.000$$

$$\dots = R - C = 60.000 - 50.000 = 10.000$$

Jadi apabila perusahaan memproduksi sebanyak 300 unit maka perusahaan akan memperoleh keuntungan sebesar 10.000. Posisi pulang pokok terjadi pada tingkat produksi 200 unit, R dan C sama-sama sebesar 40.000.

5.4. Fungsi Anggaran

Ekonomi mikro mengenal dua teori yang membahas tentang fungsi anggaran yaitu **teori produksi** dan **teori konsumsi**. **Pada teori produksi**, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang produsen membeli dua macam *input* atau lebih, berkenaan dengan jumlah dana yang tersedia dan harga masing-masing *input*. Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan isokos (*isocost*). **Pada teori konsumsi**, fungsi anggaran mencerminkan batas maksimum kemampuan seorang konsumen membeli dua macam *output* atau lebih, berkenaan dengan jumlah pendapatannya dan harga masing-masing *output*. Gambar dari fungsi anggarannya dikenal dengan sebutan garis anggaran (*budget line*).

Bentuk umum persamaan fungsi anggaran,

$$M = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

Teori Produksi

M : jumlah dana produsen

x : jumlah *input* X

y : jumlah *input* Y

P_x : harga X per unit

P_y : harga Y per unit

Teori Konsumsi

M : jumlah pendapatan konsumen

x : jumlah *output* X

y : jumlah *output* Y

P_x : harga X per unit

P_y : harga Y per unit

Contoh 9 :

Bentuklah persamaan anggaran seorang konsumen untuk barang X dan barang Y apabila pendapatan yang disediakan sebesar Rp. 100.000,- sedangkan harga barang X dan barang Y masing-masing Rp. 500,- dan Rp. 1.000,- per unit. Jika semua pendapatan yang dianggarkan dibelanjakan untuk barang X, berapa unit barang X dapat dibelinya ? Berapa unit barang Y dapat dibeli kalau ia hanya membeli 100 unit barang X ?

Jawab :

$$M = x \cdot P_x + y \cdot P_y$$

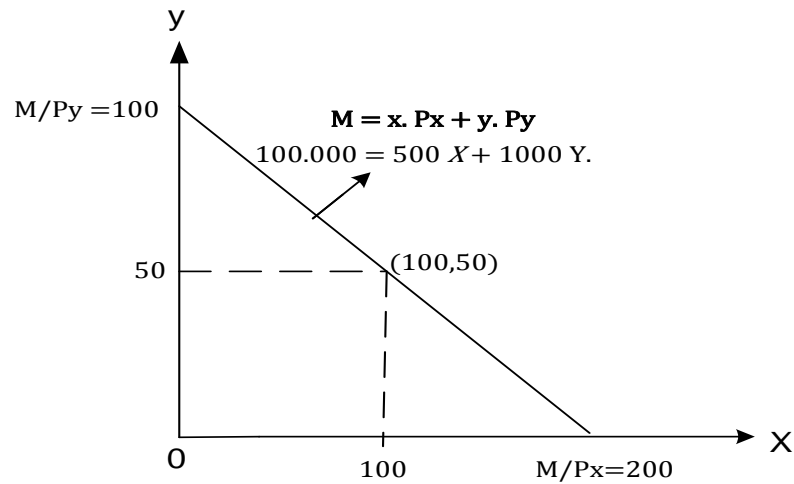
Persamaan anggarannya adalah $100.000 = 500 X + 1000 Y$.

Jika semua pendapatan dibelanjakan untuk barang X ($Y = 0$), maka jumlah X yang dapat dibeli $100.000 = 500 X \rightarrow X = 200$ unit. Jika barang X dibeli sebanyak 100 unit maka,

$$100.000 = 500 (100) + 1000 Y$$

$$1000 Y = 50000$$

$$Y = 50 \text{ unit}$$



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Suatu perusahaan menghasilkan produknya dengan biaya variabel per unit Rp.4.000,- dan harga jualnya per unit Rp.12.000,-. Manajemen menetapkan biaya tetap dari operasinya Rp.2.000.000,-. Tentukan jumlah unit produk yang harus perusahaan jual agar mencapai pulang pokok (BEP) ?
2. Sebuah produk mainan yang dihasilkan oleh PT.Abrakadabra dijual dengan harga Rp.20.000,- per unit.
 - a. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan tersebut !
 - b. Berapa besar penerimaan PT. Abrakadabra bila terjual barang sebanyak 300 unit ?
3. Apabila biaya total yang dikeluarkan PT.Abrakadabra ditunjukkan oleh persamaan $C = 40.000 + 50Q$ dan penerimaan totalnya $R = 300Q$.
 - a. Pada jumlah produksi berapa unit mainan PT. Abrakadabra ini berada dalam posisi pulang pokok (BEP) ?
 - b. Apa yang akan terjadi jika PT. Abrakadabra memproduksi mainan sebanyak 600 unit ?

6. Fungsi Konsumsi, Tabungan, Angka Pengganda, Dan Pendapatan Disposabel

Pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan (pendapatan nasional) dalam ekonomi makro dialokasikan ke dua kategori penggunaan yaitu penggunaan konsumsi dan ditabung, Jika dimisalkan Y = pendapatan nasional, C = konsumsi, dan S =tabungan maka persamaannya adalah,

$$Y = C + S$$

Konsumsi dan tabungan nasional pada umumnya dilambangkan sebagai fungsi linier dari pendapatan nasional. Keduanya berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Jadi apabila semakin besar pendapatan maka konsumsi dan tabungan juga akan semakin besar, hal tersebut berlaku pula untuk kebalikkannya.

6.1. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi menjelaskan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional, yang secara umum dirumuskan sebagai berikut,

$$C = f(Y) = C_0 + cY$$

Keterangan,

C_0 : konsumsi otonom

c : $MPC = \dots C / \dots Y$

konstanta C_0 menunjukkan besarnya konsumsi nasional pada saat pendapatan nasional sebesar nol (mencerminkan konsumsi nasional minimum/*autonomous consumption*, konsumsi otonom) yang pasti harus tersedia walaupun pendapatan nasional nihil. Secara grafik C_0 merupakan penggal kurva konsumsi pada sumbu vertikal C . Koefisien “ c ” mencerminkan besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional. Dalam bahasa ekonomi “ c ” adalah *Marginal Propensity Consume*.

6.2. Fungsi Tabungan

Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dan pendapatan nasional yang secara umum bentuk persamaannya adalah sebagai berikut,

$$S = g(Y) = S_0 + sY$$

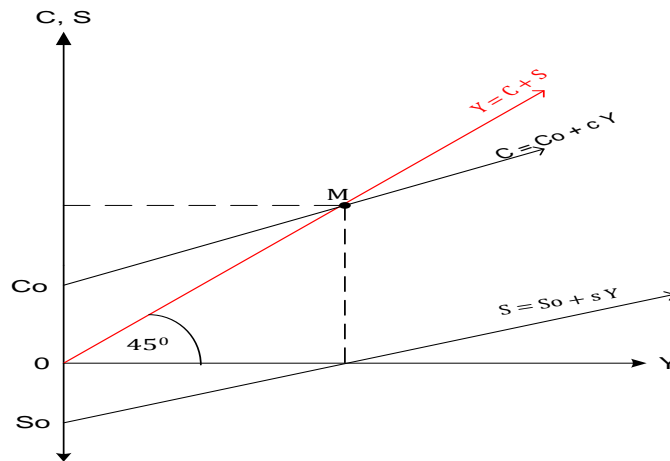
Keterangan,

S_0 : tabungan otonom

s : $MPS = \dots S / \dots Y$

konstanta S_0 menunjukkan besarnya tabungan otonom (*autonomous saving*) merupakan penggal kurva tabungan pada sumbu vertikal S. Koefisien “s” adalah *Marginal Propensity to Save* merupakan lereng dari kurva tabungan.

Kurva konsumsi dan tabungan dapat digambarkan secara bersama-sama pada sistem sumbu silang seperti di bawah ini,



Garis bantu $Y = C + S$ yang membentuk sudut 45° merupakan penjumlahan grafik kurva C dan kurva S. Pada titik M nilai $S = 0$, berarti seluruh pendapatan dialokasikan untuk keperluan konsumsi. Di sebelah kanan titik M pendapatan lebih besar daripada konsumsi sehingga kelebihan pendapatan tersebut bisa ditabung, hal ini tercermin dari positifnya kurva S. Sedangkan di sebelah kiri titik M pendapatan lebih kecil daripada konsumsi, berarti sebagian konsumsi dibiayai bukan dari pendapatan sendiri melainkan dari sumber lain misalnya pinjaman. Dalam kondisi ini tabungannya negatif (*dissaving*). Pada titik $O (0,0)$ seluruh konsumsi bahkan dibiayai bukan dari pendapatan, besarnya konsumsi sama dengan tabungan negatif.

Contoh 10 :

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 30 + 0,8 Y$.

- Bagaimanakah fungsi tabungannya ?
- Bagaimanakah besarnya konsumsi jika tabungan sebesar 20 ?

Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{a. } S &= Y - C \\
 &= Y - (30 + 0,8 Y) \\
 S &= - 30 + 0,2 Y
 \end{aligned}$$

b. Jika besarnya $S = 20$ maka,

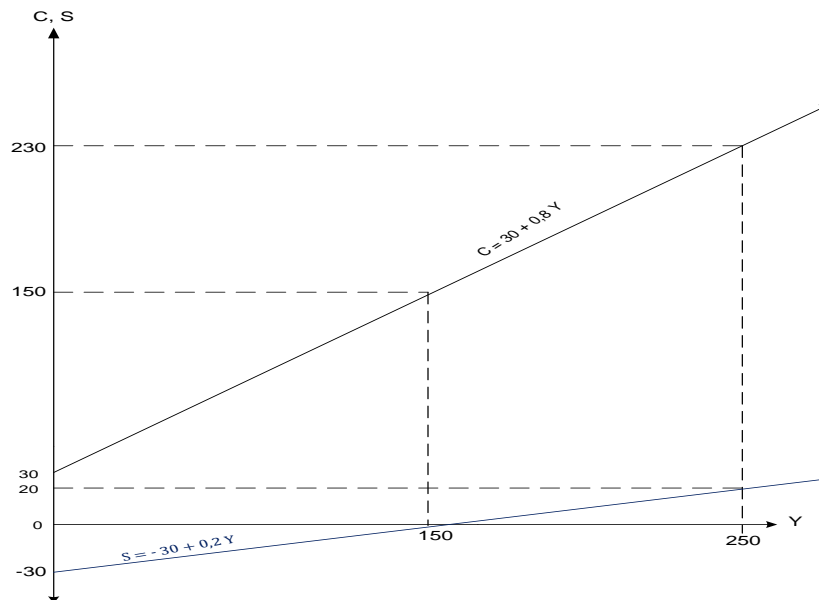
$$S = -30 + 0,2 Y$$

$$20 = -30 + 0,2 Y$$

$$0,2 Y = 50$$

$$Y = 250$$

Jadi besarnya konsumsi dengan tabungan sebesar 20 adalah $C = Y - S = 230$.



6.3. Angka Pengganda

Angka pengganda ialah suatu bilangan yang menjelaskan tambahan pendapatan nasional sebagai akibat adanya perubahan pada variabel-variabel tertentu dalam perekonomian. Rumus angka pengganda model sederhana adalah sebagai berikut,

$$k = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{s}$$

Keterangan : $c = \text{MPC}$ dan $s = \text{MPS}$

dari contoh 10 dengan nilai $\text{MPS} = 0,2$ berarti angka penggandanya $k = 5$. Artinya bahwa apabila variabel ekonomi tertentu (misalnya investasi atau pengeluaran pemerintah) ditambah sejumlah variabel tertentu, maka pendapatan nasional akan bertambah sebesar 5 kali variabel tersebut.

6.4. Pendapatan Disposabel

Pendapatan disposabel (*disposable income*) adalah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat (tidak termasuk di dalamnya pendapatan

pemerintah seperti pajak, cukai, dsb). Pengenaan pajak menyebabkan pendapatan disposabel berkurang sebesar pajak tersebut. Misalnya jika pendapatan nasional adalah Y , tetapi di dalamnya termasuk pendapatan pemerintah atau pajak sebesar T , maka pendapatan disposabel yang dapat dibelanjakan dan ditabung oleh masyarakat adalah sebesar $Y_d = Y - T$. Jadi pajak merupakan variabel yang memperkecil pendapatan disposabel.

Variabel yang memperbesar pendapatan disposabel masyarakat adalah variabel pembayaran khusus dari pemerintah kepada masyarakat yang sifatnya merupakan pembayaran ekstra atau tunjangan (misalnya tunjangan pension, THR, gaji ke 13, dll). Pembayaran khusus yang bersifat ekstra dalam ekonomi makro dikenal dengan istilah **pembayaran alihan** (*transfer payment*). Misalnya jika pendapatan nasional sebesar Y , tetapi selain itu pemerintah memberikan pembayaran alihan sebesar R , maka pendapatan disposabelnya menjadi $Y_d = Y + R$.

Besarnya pendapatan disposabel dapat dirinci sebagai berikut,

- Apabila tidak terdapat pajak maupun pembayaran alihan maka,

$$Y_d = Y$$

- Apabila hanya terdapat pajak maka,

$$Y_d = Y - T$$

- Apabila hanya terdapat pembayaran alihan maka,

$$Y_d = Y + R$$

- Apabila terdapat pajak dan pembayaran alihan maka,

$$Y_d = Y - T + R$$

Memahami penjelasan di atas akhirnya kita dapat mengetahui bahwa variabel bebas dalam persamaan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan sesungguhnya adalah pendapatan disposabel (Y_d) bukan pendapatan nasional (Y). Oleh karena itu rumus fungsi konsumsi dan fungsi tabungan menjadi,

$$C = f(Y_d) = C_0 + c Y_d$$

$$S = g(Y_d) = S_0 + s Y_d$$

$$Y_d = C + S$$

Contoh 11 :

Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan dengan persamaan $C = 30 + 0,8Y_d$. Jika pemerintah menerima pajak dari masyarakat sebesar 16 akan tetapi pemerintah juga memberi pembayaran alihan kepada masyarakat sebesar 6.

- a. Berapakah konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 200 ?
- b. Berapakah tabungan nasional yang terkumpul ?

Jawab :

- a. $Y_d = Y - T + R = 200 - 16 + 6 = 190$
 $C = 30 + 0,8 Y_d = 30 + 0,8 (190) = 182$
- b. $S = Y_d - C = 190 - 182 = 8$

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Andaikan konsumsi nasional ditunjukkan oleh persamaan $C = 4,5 + 0,9 Y_d$ dan pendapatan yang dapat dibelanjakan adalah Rp. 15 juta.
 - a. Carilah fungsi tabungannya ?
 - b. Berapa nilai konsumsi nasional ?
2. Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan dengan persamaan $C = 60 + 1,6Y_d$. Jika pemerintah menerima pajak dari masyarakat sebesar 32 akan tetapi pemerintah juga memberi pembayaran alihan berupa subsidi kepada masyarakat sebesar 12.
 - a. Berapakah konsumsi nasional seandainya pendapatan nasional pada tahun tersebut sebesar 400 ?
 - b. Berapakah tabungan nasional yang terkumpul ?

7. Fungsi Pajak, Investasi, Impor, Dan Pendapatan Nasional

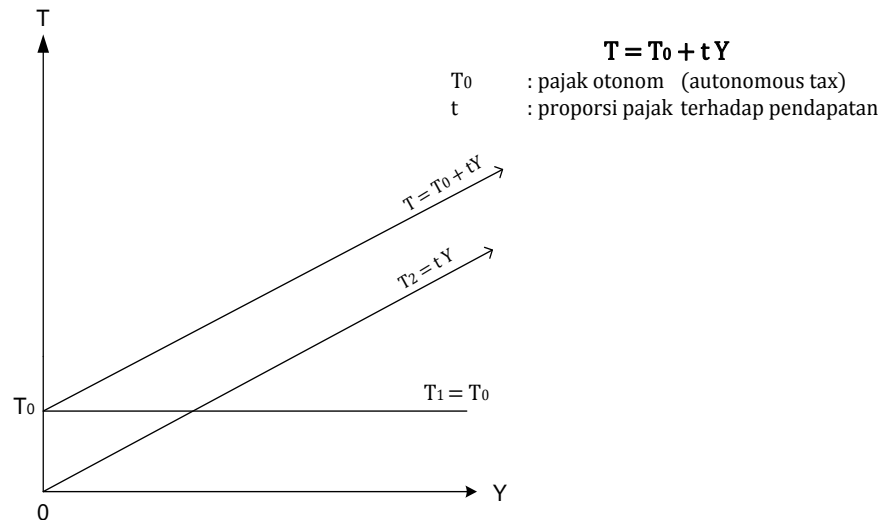
7.1. Fungsi Pajak

Terdapat dua model pajak yang dikenakan pemerintah kepada masyarakat yaitu,

- a. **Pajak Jumlah Tertentu** (pajak yang tidak dikaitkan dengan tingkat pendapatan). Secara matematik dituliskan sebagai $T_1 = T_0$. Kurvanya berbentuk sebuah garis lurus sejajar dengan sumbu pendapatan.

- b. **Pajak yang ditetapkan sesuai dengan tingkat pendapatan**, besarnya merupakan proporsi atau persentase tertentu dari pendapatan. Secara matematik dituliskan sebagai $T_2 = t Y$. Kurvanya berbentuk sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal.

Total pajak yang diterima oleh pemerintah adalah $T = T_0 + t Y$, kurvanya berbentuk sebuah garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik T_0 .



7.2. Fungsi Investasi

Permintaan investasi merupakan fungsi dari tingkat bunga, jadi jika investasi dilambangkan “I” dan tingkat bunga (*interest rate*) dilambangkan dengan “i” maka secara umum fungsi (permintaan akan) investasi dituliskan sebagai berikut,

$$I = f(i)$$

$$I = I_0 - pi$$

ket : I_0 = investasi otonom

Permintaan akan investasi berbanding terbalik dengan tingkat bunga. Artinya bila tingkat bunga tinggi maka orang akan lebih senang menyimpan uangnya di bank daripada menginvestasikannya. Tingginya bunga juga mencerminkan mahalnya kredit, sehingga mengurangi gairah orang untuk berinvestasi. Hal sebaliknya akan terjadi jika tingkat bunga rendah.

Contoh 12 :

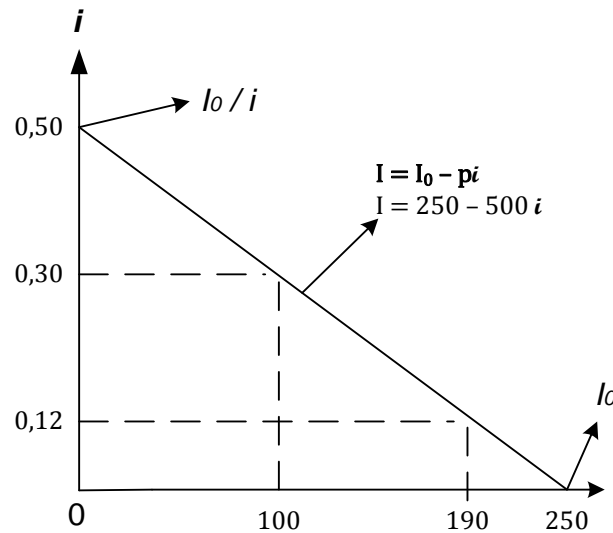
Jika permintaan akan investasi ditunjukkan dengan persamaan $I = 250 - 500 i$.

- Berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 12% ?
- Berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 30% ?

Jawab :

a. $I = 250 - 500 i$, jika $i = 12\% = 0,12$ maka $I = 250 - 500 (0,12) = 250 - 60 = 190$

b. $I = 250 - 500 i$, jika $i = 30\% = 0,30$ maka $I = 250 - 500 (0,30) = 250 - 150 = 100$



7.3. Fungsi Impor

Impor suatu negara merupakan fungsi dari pendapatan nasionalnya dan cenderung berkorelasi positif. Semakin besar pendapatan nasional suatu negara, semakin besar pula kebutuhan atau hasratnya akan barang-barang dari luar negeri (terutama barang modal, bagi negara yang sedang berkembang) sehingga nilai impornya semakin besar. Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut,

$$M = M_0 + m Y$$

Keterangan,

M_0 : impor otonom

Y : pendapatan nasional

M : marginal propensity to import = $\dots M / \dots Y$

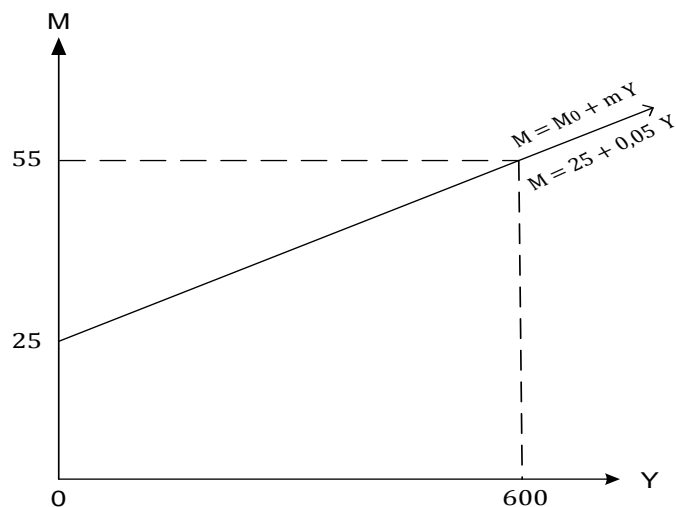
Contoh 13 :

Bentuklah persamaan impor suatu negara bila diketahui impor otonomnya 25 dan *marginal propensity to import* nya 0,05 ! Berapakah nilai impornya jika pendapatan nasional sebesar 600 ?

Jawab :

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = 25 \\ m = 0,05 \end{array} \right\} M = M_0 + m Y = 25 + 0,05 Y$$

Jika $Y = 600$ maka $M = 25 + 0,05 (600) = 25 + 30 = 55$



7.4. Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional adalah jumlah nilai seluruh output (barang dan jasa) yang dihasilkan oleh suatu negara dalam jangka waktu tertentu yang dilakukan oleh seluruh sektor perekonomian di suatu negara. Sektor-sektor perekonomian yang dimaksud adalah sektor rumah tangga, badan usaha, pemerintah, dan sektor perdagangan dengan luar negeri. Pengeluaran sector rumah tangga dicerminkan oleh konsumsi masyarakat (C), pengeluaran sector badan usaha dicerminkan investasi yang dilakukan oleh perusahaan-perusahaan (I), pengeluaran sector pemerintah dicerminkan oleh pengeluaran pemerintah (G), dan pengeluaran perdagangan dengan luar negeri tercermin dari selisih antara ekspor dan impor negara tersebut ($X - M$).

Ada tiga model perekonomian yang digunakan untuk menganalisis pendapatan nasional yaitu,

1. Model Perekonomian Sederhana (hanya ada dua sektor yaitu sektor rumah tangga dan badan usaha).

$$Y = C + I$$

2. Model Perekonomian Tertutup (terdiri atas tiga sektor yaitu sektor rumah tangga, badan usaha, dan pemerintah).

$$Y = C + I + G$$

3. Model Perekonomian Terbuka (terdiri atas empat sektor yaitu sektor rumah tangga, badan usaha, pemerintah, dan perdagangan dengan luar negeri).

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

Contoh 14 :

Hitunglah pendapatan nasional suatu negara jika diketahui konsumsi otonom masyarakatnya sebesar 500; MPS = 0,2; investasi yang dilakukan oleh sektor badan usaha = 300; pengeluaran pemerintah = 250; sedangkan nilai ekspor dan impornya masing-masing 225 dan 175 !

Jawab :

$$\begin{aligned} C_o &= 500 \\ c &= MPC = 0,8 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} C &= C_o + cY_d = 500 + 0,8 Y_d = 500 + 0,8 Y \\ \text{sebab } Y_d &= Y - T + R = Y - 0 - 0 = Y \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + (X - M) \\ &= 500 + 0,8 Y + 300 + 250 + (225 - 175) \end{aligned}$$

$$0,2 Y = 1100$$

$$Y = 5500$$

Model perekonomian terbuka yang kompleks memerlukan perhitungan angka pengganda yang cukup rumit, karena selain terdapat variabel konsumsi (C), investasi (I), pemerintah (G), juga terdapat variabel pajak (T) dan pembayaran alihan (R) yang keduanya bersama-sama dengan impor(M) merupakan fungsi dari pendapatan nasional (Y). Kesamaan pendapatan nasionalnya menjadi sebagai berikut,

$$Y = \frac{1}{1 - c + ct - cr + m} (C_o - cT_o + I_o + G_o + X_o - M_o)$$

Angka penggandanya secara umum ialah,

$$k = \frac{1}{1 - c + ct - cr + m}$$

Dimana = 1- c + ct - cr + m

Contoh 15 :

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan $C = 1500 + 0,75 Y_d$. Investasi dan pengeluaran pemerintah masing-masing 2000 dan 1000. Pajak yang diterima dan pembayaran alihan yang dilakukan pemerintah masing-masing dicerminkan dalam persamaan $T = 500 + 0,25 Y$ dan $R = 100 + 0,05 Y$. Jika nilai ekspornya 1250 dan impornya dicerminkan dalam persamaan $M = 700 + 0,10 Y$.

a. Hitunglah pendapatan nasional negara tersebut !

b. Hitunglah konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya !

c. Berapa pendapatan nasional yang baru seandainya pemerintah menaikkan pengeluarannya menjadi sama dengan nilai ekspor ?

Jawab :

Soal a

$$\begin{aligned} Y_d &= Y - T + R \\ &= Y - 500 - 0,25 Y + 100 + 0,05 Y \\ &= 0,80 Y - 400 \end{aligned}$$

$$\text{Nilai konsumsi } C = 1500 + 0,75 Y_d = 1500 + 0,75 (0,80 Y - 400)$$

$$C = 1200 + 0,60 Y$$

Rumus pendapatan nasional :

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + (X - M) \\ &= 1200 + 0,60 Y + 2000 + 1000 + 1250 - 700 - 0,10 Y \end{aligned}$$

$$Y = 4750 + 0,50 Y \quad \rightarrow \quad 0,5 Y = 4750$$

$$Y = 9500$$

Jadi pendapatan nasional negara tersebut sebesar 9500.

Soal b

Sebelum mencari konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impor perlu diketahui terlebih dahulu pendapatan disposabelnya (Y_d). Dari soal a diketahui bahwa $Y_d = 0,80 Y - 400 = 0,80 (9500) - 400 = 7200$. Jadi,

$$\text{Konsumsi } = C = 1500 + 0,75 Y_d = 1500 + 0,75 (7200) = 6900$$

$$\text{Tabungan } = S = Y_d - C = 7200 - 6900 = 300$$

$$\text{Pajak } = T = 500 + 0,25 Y = 500 + 0,25 (9500) = 2875$$

$$\text{Pembayaran alihan} = R = 100 + 0,05 Y = 100 + 0,05 (9500) = 575$$

$$\text{Impor } = M = 700 + 0,10 Y = 700 + 0,10 (9500) = 1650$$

Soal c

Untuk menghitung pendapatan nasional yang baru perlu dihitung angka penggandanya dahulu.

$$\dots = 1 - c + ct - cr + m = 1 - 0,75 + 0,75(0,25) - 0,75(0,05) + 0,10 = 0,5$$

$$k_G = \frac{1}{0,5} = \frac{1}{0,5} = 2$$

$G' = X = 1250$, berarti $G = G' - G = 1250 - 1000 = 250$

..... $Y = k_g \times \dots G = 2 \times 250 = 500$

$Y' = Y + \dots Y = 9500 + 500 = 10.000$

Jadi pendapatan nasional yang baru sebesar 10.000

Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. Jika permintaan akan investasi ditunjukkan dengan persamaan $I = 500 - 1000i$, berapakah besarnya investasi pada saat tingkat bunga bank 12% ?
2. Persamaan konsumsi masyarakat di negeri Aladin ditunjukkan oleh persamaan $C = 3000 + 1,5 Y_d$. Sedangkan investasinya sebesar 4000 dan pengeluaran pemerintah sebesar 2000. Pajak di negeri Aladin tercermin dalam persamaan $T = 1000 + 0,50Y$, dan pembayaran alihan tercermin dalam persamaan $R = 200 + 0,1 Y$. Apabila nilai ekspornya sebesar 2500 dan nilai impornya tercermin dalam persamaan $M = 1400 + 0,2 Y$.
 - a. Hitunglah pendapatan nasional negara tersebut !
 - b. Hitunglah konsumsi, tabungan, pajak, pembayaran alihan dan nilai impornya!

8. Analisis Is – Lm Dan Keseimbangan Serempak

8.1. Analisis IS – LM

Dalam ekonomi makro pasar dibedakan berdasarkan objeknya dan dibagi menjadi tiga macam yaitu pasar barang (termasuk jasa), pasar uang (termasuk modal), dan pasar tenaga kerja. Analisis yang membahas keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang dikenal dengan istilah analisis IS – LM. Alat analisis yang digunakan adalah kurva IS dan LM.

a. Kurva IS

Kurva IS ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar barang. Untuk model perekonomian sederhana (dua sektor), persamaan kurva IS dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan investasi (I) terhadap persamaan tabungan (S). Bentuk umum persamaan kurva IS adalah,

$$Y = f(i) = Y_b - b i$$

Dimana $Y_b = \frac{C_0 - I_0}{1 - \beta}$; $b = \frac{\beta}{1 - \beta}$

Contoh 16 :

Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva IS untuk $C = 500 + 0,80 Y$ dan $I = 2000 - 5000i$

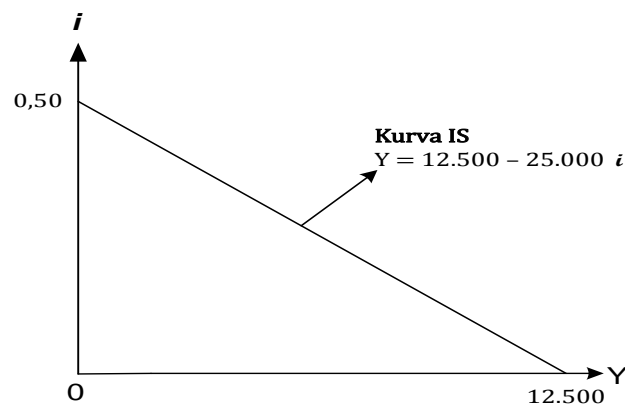
Jawab :

$$\left. \begin{array}{l} C = 500 + 0,80 Y \text{ berarti,} \\ S = -500 + 0,20 Y \\ I = 2000 - 5000 i \end{array} \right\} I = S, \text{ dimana } S = Y - C$$

$$I = S$$

$$2000 - 5000 i = -500 + 0,20 Y$$

$$Y = 12.500 - 25.000 i$$



b. Kurva LM

Kurva LM ialah kurva yang menunjukkan keseimbangan antara pendapatan nasional dan tingkat bunga di pasar uang. Untuk model perekonomian sederhana (dua sektor), persamaan kurva LM dapat dibentuk dengan menyamakan persamaan permintaan akan uang (L , *Liquidity preference*) terhadap persamaan penawaran uang (M , *Money supply*).

Permintaan akan uang : $L = L_0 + k Y - h i$

Penawaran uang : $M = M_0$

Bentuk umum persamaan kurva LM adalah,

$$Y = g(i) = Y_u - u i$$

Dimana $u = \frac{L_1 - L_2}{i_1 - i_2}$; $Y_u = \frac{L_1 i_2 - L_2 i_1}{i_1 - i_2}$

Contoh 17 :

Bentuklah persamaan dan gambarkan kurva LM jika permintaan akan uang ditunjukkan oleh $L = 10.000 + 0,4 Y - 20.000i$ dan jumlah uang ditawarkan (beredar) sebesar 9.000.

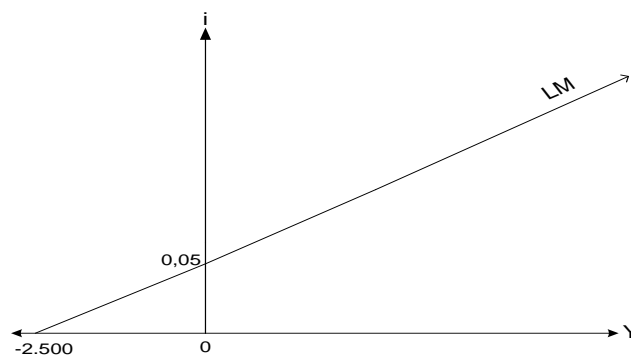
Jawab :

$$L = M$$

$$10.000 + 0,4 Y - 20.000 i = 9.000$$

$$0,4 Y = - 10.000 + 20.000 i$$

$$Y = -2.500 + 50.000 i$$



8.2. Keseimbangan Serempak

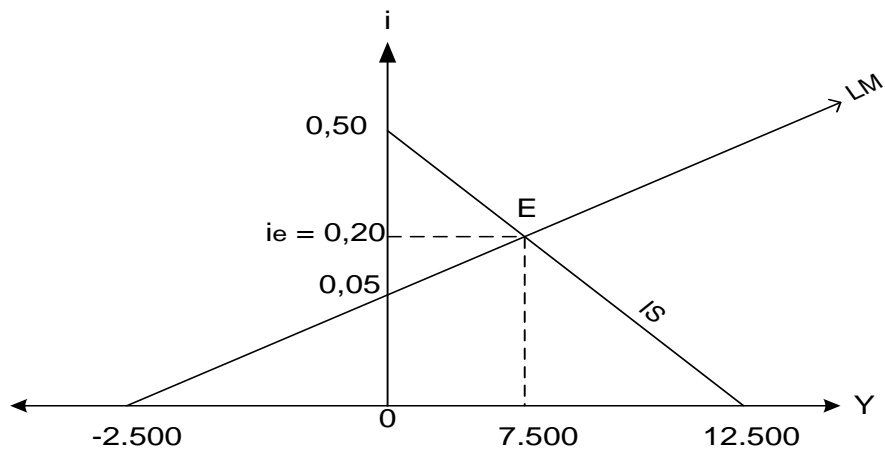
Keseimbangan serempak di pasar barang dan pasar uang ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva IS dan kurva LM. Pada posisi ini tercipta bunga keseimbangan dan pendapatan keseimbangan. Untuk contoh 17 keseimbangan serempak tercipta pada suku bunga 20% dan pendapatan nasional 7.500.

$$IS = LM$$

$$12.500 - 25.000 i = -2.500 + 50.000 i$$

$$15.000 = 75.000 i$$

$$i = 0,20 \quad ; \quad Y = 7.500$$



Latihan :

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja yang telah disediakan!

1. • Buatlah persamaan dan gambarkan kurva IS untuk $C = 1000 + 0,80 Y$ dan $I = 4000 - 10000i$
2. a. Buatlah persamaan dan gambarkan kurva LM jika permintaan akan uang ditunjukkan oleh $L = 5.000 + 0,2 Y - 10.000i$ dan jumlah uang ditawarkan (beredar) sebesar 4.500.
- b. Berapa besar suku bunga dan pendapatan nasional agar keseimbangan serempak dapat tercipta ?

BAB 3

BUNGA SEDERHANA

1. PENDAHULUAN

Uang adalah alat pertukaran yang sah. Dalam kehidupan sehari-hari setiap manusia pasti membutuhkan uang untuk membiayai kebutuhan hidupnya seperti sandang, pangan, papan, dan lain sebagainya. Ketika kita tidak memiliki uang yang cukup untuk membeli sesuatu atau membayar utang, kita dapat melakukan pinjaman ke pihak lain, seperti saudara, kawan, tetangga, rentenir, ataupun lembaga keuangan

(bank, nonbank, pegadaian, koperasi, dan lain-lain). Ketika kita memiliki uang lebih, kita akan mencari alternatif-alternatif investasi dan memilih alternatif yang paling menguntungkan.

2. KONSEP BUNGA SEDERHANA DAN NILAI WAKTU DARI UANG

Seandainya Anda dihadapkan pada dua pilihan, yaitu menerima sejumlah uang, misalkan Rp1.000.000 hari ini atau Rp 1.000.000 enam bulan lagi dengan tingkat kepastian yang sama, mana yang Anda pilih? Hampir pasti, Anda akan memilih menerima Rp 1.000.000 pada hari ini daripada menerimanya enam bulan lagi. Mengapa?

Ada yang menjawab, “Karena menerima uang pada hari ini sifatnya pasti, sedangkan menerimanya enam bulan lagi sifatnya tidak pasti” ini bukan jawaban yang diharapkan tentunya. Untuk menghindari jawaban ini, dalam pilihan di atas disebutkan bahwa kedua pilihan tersebut memiliki tingkat kepastian yang sama. Mereka yang pernah belajar ekonomi atau keuangan akan dengan mudah memberikan alasannya, yaitu karena adanya faktor bunga akibat perbedaan waktu atau istilah yang sering digunakan adalah nilai waktu dan uang (*time value of money*).

Dengan asumsi manusia adalah makhluk rasional, pilihan yang harus diambil adalah menerima Rp 1.000.000 pada hari ini dibandingkan dengan menerimanya enam bulan lagi. Karena Rp 1.000.000 hari ini akan memberikan bunga selama enam bulan yang besarnya bergantung pada tingkat bunga, sehingga bernilai lebih dari Rp 1.000.000 pada saat itu (pendekatan nilai akan datang atau *future value*). Kita juga bisa menggunakan pendekatan nilai sekarang (*present value*), yaitu dengan menghitung nilai hari ini dari uang senilai Rp 1.000.000 enam bulan lagi dan membandingkannya dengan uang senilai Rp 1.000.000 pada hari ini. Kedua pendekatan ini harus memberikan keputusan yang sama.

Contoh sederhana di atas dapat kita lanjutkan dengan pilihan-pilihan lainnya. Misalkan, bagaimana kalau Rp 1.000.000 hari ini dengan Rp 1.100.000 enam bulan

lagi; atau Rp 1.000.000 hari ini dengan Rp 100.000 setiap bulan selama satu tahun mulai bulan depan; atau Rp 1.000.000 hari ini dengan Rp 90.000 setiap bulan selama setahun mulai hari ini.

Dengan memahami matematika keuangan, kita akan dapat dengan mudah menyelesaikan persoalan-persoalan sederhana di atas, bahkan persoalan yang jauh lebih kompleks sekalipun. Dalam pembahasan dan contoh selanjutnya dalam buku ini, asumsi bahwa manusia adalah makhluk rasional ataupun dengan tingkat kepastian yang sama tidak disebutkan lagi, tetapi ada secara implisit.

Melanjutkan contoh pertama kita, menjadi berapa uang Rp 1.000.000 itu enam bulan lagi akan dapat ditentukan jika kita diberikan tingkat bunga dan tambahan informasi mengenai apakah tingkat bunga yang digunakan tersebut adalah bunga sederhana (*simple interest—SI*) atau bunga majemuk (*compound interest—CI*). Apabila menggunakan bunga majemuk, kita masih memerlukan informasi mengenai periode *compound* atau periode perhitungan bunga. Pembahasan mengenai hal ini akan diberikan secara lengkap di Bab 3.

Apabila kita menggunakan konsep bunga sederhana, besarnya bunga dihitung dan nilai pokok awal (*principal*) dikalikan dengan tingkat bunga (*interest rate*) dan waktu (*time*). Perhitungan bunga ini dilakukan satu kali saja, yaitu pada akhir periode atau pada tanggal pelunasan. Secara matematis, hal ini dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$SI = Prt \tag{1}$$

dengan: $SI = \textit{simple interest}$ (bunga sederhana)

$P = \textit{principal}$ (pokok)

$r = \textit{interest rate p.a.}$ (tingkat bunga/tahun)

$t = \textit{time}$ (waktu dalam tahun)

Karena satuan t adalah tahun, jika waktu t dinyatakan dalam bulan maka kita dapat menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$t = \frac{\text{jumlah bulan}}{12}$$

Sedangkan jika t dinyatakan dalam hari, akan ada dua metode dalam mencari nilai t , yaitu:

1. Bunga tepat (*Exact Interest*) atau *SIe* dengan $t = \frac{\text{jumlah hari}}{365}$
2. Bunga Biasa (*Ordinary interest*) atau *SIo* dengan $t = \frac{\text{jumlah hari}}{360}$

Penggunaan metode bunga biasa (*ordinary interest*) akan menguntungkan penenima bunga dan merugikan pembayar bunga. Sebaliknya, penggunaan metode bunga tepat (*exact interest*) akan menguntungkan pembayar bunga dan merugikan penerima bunga. Oleh karena itu, dalam hal pinjaman (kredit), bank lebih menyukai

penggunaan bunga biasa, sementara untuk tabungan dan deposito mereka lebih memilih penggunaan bunga tepat dalam perhitungan bunganya.

Bunga biasa digunakan dalam pasar uang (dibahas di Bab11). Di bagian lain dalam buku ini. kecuali dinyatakan lain, bunga tepat akan digunakan dalam contoh dan soal yang diberikan, dan tingkat bunga yang diberikan harus dibaca sebagai tingkat bunga per tahun *atauper annum* (p.a.). Alternatif lain penghitungan bunga yang juga disediakan dalam Microsoft Excel adalah aktual/aktual dan metode 30/360

Contoh 3.1 Hitung bunga tepat dan bunga biasa dan sebuah pinjaman sebesar Rp20.000.000 selama 60 hari dengan bunga 8%.

Jawab:

$$P = \text{Rp}20.000.000$$

$$r = 8\% = 0,08$$

$$t = 60\text{hari}$$

$$SI = P r t$$

$$\begin{aligned} \text{Bunga tepat (SIe)} &= \text{Rp } 20.000.000 \times 0,08 \times \frac{60}{365} \\ &= \text{Rp } 265.013,70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bunga biasa (Sio)} &= \text{Rp } 20.000.000 \times 0,08 \times \frac{60}{360} \\ &= \text{Rp } 266.666,67 \end{aligned}$$

Contoh 3.2 Pak Amir menabung di Bank ABC sebesar Rp 1.000.000 selama 3 bulan dengan bunga 12% p.a. Hitung bunga tabungan yang ia peroleh.

Jawab:

$$P = \text{Rp } 1.000.000$$

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = \frac{3}{12} = 0,25$$

$$SI = P r t$$

$$= \text{Rp}1.000.000 \times 0,12 \times 0,25$$

$$= \text{Rp}30.000$$

Contoh 3.3 Hitung bunga yang dibayarkan sebuah obligasi yang memiliki nilai nominal Rp100.000.000 dan berbunga 15% p.a. jika pemhayaran bunga dilakukan setiap 6 bulan.

Jawab :

$$P = \text{Rp } 100.000.000$$

$$r = 15\% = 0,15$$

$$t = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$SI = P r t$$

$$= \text{Rp } 100.000.000 \times 0,15 \times 0,5$$

$$= \text{Rp } 7.500.000$$

Contoh 3.4 Sepasang pengantin baru mengahmii Kredit Pernilikan Rtimah (KPR) sebesar Rp 100.000.000 dengan tingkat bunga efektif 15% p.a.,angsuran per bulan Rp2.000.000. Untuk angsuran pertama yang mereka bayarkan, berapa besarnya pembayaran bunga dan pelunasan pokok?

Jawab:

$$P = \text{Rp. } 100.000.000$$

$$\text{Angsuran} = \text{Rp. } 2.000.000$$

$$r = 15\% = 0,15$$

$$t = \frac{1}{12}$$

$$SI = P r t$$

$$= \text{Rp}100.000.000 \times 0,15 \times \frac{1}{12}$$

$$= \text{Rp}1.250.000$$

Jadi, pelunasan pokok pinjaman dalam angsuran pertama tersebut adalah sebesar Rp750.000, yaitu didapat dari Rp2.000.000 – Rp1.250.000 = Rp750.000

3. MANIPULASI PERSAMAAN BUNGA SEDERHANA

Dengan menggunakan Persamaan (1), kita juga dapat menghitung nilai pokok, tingkat bunga, ataupun waktu, jika diberikan variabel lainnya. Jika $SI = Prt$, maka:

$$P = \frac{SI}{rt}$$

(2)

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

(3)

dan $t = \frac{SI}{Pr}$

(4)

Contoh 3.5 Setelah meminjam selama 73 hari, Ibu Tina melunasi pembayaran bunga pinjamanyasebesar Rp2.880.000. Berapa besarnya pinjaman Ibu Tina jika tingkat bunga seederhana 18% p.a.?

Jawab:

$$r = 18\% = 0,18$$

$$t = \frac{73}{365} = 0,2$$

$$SI = \text{Rp}2.880.000$$

$$P = \frac{SI}{rt}$$

$$= \frac{\text{Rp} 2.880.000}{0,18 \times \frac{73}{365}} = \text{Rp} 80.000.000$$

Contoh 3.6 Seorang rentenir menawarkan pinjaman sebesar Rp1.000.000 yang harus dilunasi dalam waktu 1 bulan sebesar Rp1.250.000. Berapa

tingkat bunga sederhana tahunan yang dikenakan atas pinjaman tersebut?

Jawab:

$$\begin{aligned}P &= \text{Rp } 1.000.000 \\SI &= \text{Rp } 1.250.000 - \text{Rp } 1.000.000 = \text{Rp } 250.000 \\t &= \frac{1}{12} \\r &= \frac{SI}{P t} \\&= \frac{\text{Rp } 250.000}{\text{Rp } 1.000.000 \times \frac{1}{12}} \\&= 3 \text{ atau } 300\% \text{ p.a.}\end{aligned}$$

Contoh 3.7 Apabila Anto menabung Rp20.000.000 di bank yang memberinya tingkat bunga sederhana 15% p.a. berapa lama waktu yang ia perlukan supaya tabungannya tersebut menghasilkan bunga sebesar Rp 1.000.000?

Jawab:

$$\begin{aligned}P &= \text{Rp } 20.000.000 \\SI &= \text{Rp } 1.000.000 \\r &= 15\% = 0,15 \\t &= \frac{SI}{P r} \\&= \frac{\text{Rp } 1.000.000}{\text{Rp } 20.000.000 \times 0,15} \\&= \frac{1}{3} \text{ tahun atau } 4 \text{ bulan}\end{aligned}$$

Apabila S kita notasikan untuk nilai akhir atau jumlah dan nilai pokok dan bunga, maka:

$$S = P + SI$$

$$S = P + P r t$$

$$S = P (1 + rt)$$

(5)

Jika S , r , dan t yang diberikan dan P yang dicari, maka:

$$P = \frac{S}{(1+rt)}$$

$$P = S (1 + rt)^{-1} \quad (6)$$

Faktor $(1 + rt)^{-1}$ dalam persamaan di atas disebut juga Faktor diskon (*discount factor*) dengan menggunakan bunga sederhana, dan proses menghitung P di atas banyak digunakan dalam wesel (*promissory note*), *Certificate of Deposit*, dan Sertifikat Bank Indonesia (SBI), dan disebut pendiskontoan dengan bunga sederhana.

Contoh 3.8 Pak Karta menabung Rp3.000.000 dan mendapatkan bunga sederhana 12% p.a. Berapa saldo tabungannya setelah 3 bulan?

Jawab:

$$P = \text{Rp}3.000.000$$

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = 0,25$$

$$S = P (1 + rt)$$

$$= \text{Rp} 3.000.000 (1 + (0,12 \times 0,25))$$

$$= \text{Rp} 3.090.000$$

Contoh 3.9 Aisyah meminjam Rp 10.000.000 selama 146 hari dengan tingkat bunga sederhana 15% p.a. Berapa jumlah yang harus iabayarkan?

Jawab:

$$P = \text{Rp} 10.000.000$$

$$\begin{aligned}
r &= 15\% = 0,15 \\
t &= 146 \text{ hari} \\
S &= P (1 + rt) \\
&= \text{Rp } 10.000.000 \left(1 + \left(0,15 \times \frac{146}{365} \right) \right) \\
&= \text{Rp } 10.600.000
\end{aligned}$$

Contoh 3.10 Sejumlah uang yang disimpan dengan tingkat bunga sederhana sebesar 9% p.a akan menjadi Rp5.000.000 setelah 6 bulan. Berapa jumlah simpanan tersebut?

Jawab:

$$\begin{aligned}
S &= 5.000.000 \\
r &= 9\% = 0,09 \\
t &= \frac{6}{12} = 0,5 \\
P &= \frac{S}{(1 + rt)} \\
&= \frac{\text{Rp } 5.000.000}{(1 + (0,09 \times 0,5))} \\
&= \text{Rp } 4.784.689
\end{aligned}$$

4. MENGHITUNG JUMLAH HARI

Ada dua metode yang dapat digunakan dalam menghitung jumlah hari antara dua tanggal kalender, Metode pertama adalah dengan menghitung jumlah hari per bulan dan kemudian menjumlahkan seluruhnya.

Contoh 3.11 Hitung jumlah hari antara tanggal 11 Juni dan 3 November.

Jawab:

Haritersisa pada bulan	Juni	= 19 hari (30 -11)
	Juli	= 31
	Agustus	= 31
	September	= 30
	Oktober	= 31
	November	= 3
	Jumlah	= 145 hari

Contoh 3.12 Hitung jumlah hari antara tanggal 15 Januari dan 22 Juni.

Jawab:

Hari tersisa pada bulan	Januari	= 16 hari (31 -15)
	Februari	= 28*
	Maret	= 31
	April	= 30
	Mei	<u>= 31</u>
	Juni	= 22
	Jumlah	= 158 hari

* Jumlah hari pada bulan februari akan menjadi 29 hari untuk kabisat, yaitu tahun yang habis dibagi 4.

Contoh 3.13 Sebuah wesel bcrjangka waktu 90 han dikeluarkan pada tanggal 1 Maret 2004. Tanggal berapa wesel tersebut jatuh tempo?

Jawab:

Han tersisa dl bulan Maret	= 30 (31- 1)
April	= 30
Mei	<u>= 30</u>
	90

Jadi, tanggal jatuh temponya adalah 30 Mei 2004.

Metode kedua adalah dengan menggunakan tabel nomor urut hari seperti yang tampak pada Tabel I. Untuk tahun kabisat, jangan lupa untuk menambahkan 1 untuk semua tanggal mulai dari 1 Maret hingga 31 Desember karena pada tahun kabisat terdapat tanggal 29 Februari dan bernomor urut 60 sehingga 1 Maret akan menjadikannya ke-61, 2 Maret menjadi hari ke-62 dan seterusnya hingga tanggal 31 Desember akan menjadi hari ke-366.

Contoh 3.14 Hitung jumlah hari antara 11 Juni 2004 dan 3 November 2004.

Jawab:

3 November 2004 bernomor urut	308 (307 + 1*)
11 Juni 2004 bernomor urut	<u>163</u> - (162 + 1*)
	115 hari

Contoh 3.15 Hitung jumlah hari antara 15 Januari 2004 dan 22 Juni 2004.

Jawab:

22 Juni 2004 bernomor urut	174 (173 + 1*)
15 Januari 2004 bernomor urut	<u>15</u> -
	159 hari

*Tahun 2004 adalah tahun kabisat sehingga harus ditambahkan 1.

Contoh 3.16 Hitung Jumlah hari antara 15 Januari 2003 dan 22 Juni 2005,

Jawab:

22 Juni 2005 bernomor urut	173
15 Januari 2005 bernomor urut	<u>15</u> -
	158 hari

Tabel 1. Nomor Urut Hari

Tg	Ja	Fe	Ma	Ap	Me	Jun	Jul	Ag	Se	Ok	No	De	Tg
1	n	b	r	r	i	15	18	21	24	27	v	33	1
						2	2	3	4	4		5	
1	1	32	60	91	121	3	3	21	24	27	305	33	1
2	2	33	61	92	122	15	18	4	5	5	306	6	2
3	3	34	62	93	123	4	4	21	24	27	307	33	3
4	4	35	63	94	124	15	18	5	6	6	308	7	4
5	5	36	64	95	125	5	5	21	24	27	309	33	5
						15	18	6	7	7		8	
						6	6	21	24	27		33	
								7	8	8		9	
						15	18	21	24	27		34	
						7	7	8	9	9		0	
6	6	37	65	96	126	15	18	21	25	28	310	34	6
7	7	38	66	97	127	8	8	9	0	0	311	1	7
8	8	39	67	98	128	15	18	22	25	28	312	34	8
9	9	40	68	99	129	9	9	0	1	1	313	2	9
10	10	41	69	10	130	16	19	22	25	28	314	34	10
				0		0	0	1	2	2		3	
						16	19	22	25	28		34	
						1	1	2	3	3		4	
11	11	42	70	10	131	16	19	22	25	28	316	34	11
12	12	43	71	1	132	2	2	3	4	4	316	5	12
13	13	44	72	10	133	16	19	22	26	28	317	34	13
				2		3	3	4	5	5		6	

14	14	45	73	10	134	16	19	22	25	28	318	34	14
15	15	46	74	3	135	4	4	5	6	6	319	7	15
				10		16	19	22	25	28		34	
				4		5	5	6	7	7		8	
				10		16	19	22	25	28		34	
				5		6	6	7	8	8		9	
				10		16	19	22	25	28		35	
				6		7	7	8	9	9		0	
16	16	47	75	10	136	16	19	22	26	29	320	35	16
17	17	48	76	7	137	8	8	9	0	0	321	1	17
18	18	49	77	10	138	16	19	23	26	29	322	35	18
19	19	50	78	8	139	9	9	0	1	1	323	2	19
20	20	51	79	10	140	17	20	23	26	29	324	35	20
				9		0	0	1	2	2		3	
				11		17	20	23	26	29		35	
				0		1	1	2	3	3		4	
				11		17	20	23	28	29		35	
				1		2	2	3	4	4		5	
21	21	52	80	11	141	17	20	23	26	29	325	35	21
22	22	53	81	2	142	3	3	4	5	5	326	6	22
23	23	54	82	11	143	17	20	23	26	29	327	35	23
24	24	55	83	3	144	4	4	5	6	6	328	7	24
25	25	56	84	11	145	17	20	23	26	29	329	35	25
				4		5	5	6	7	7		8	
				11		17	20	23	26	29		35	
				5		6	6	7	8	8		9	

				11		17	20	23	26	29		36	
				6		7	7	8	9	9		0	
26	26	57	85	ii?	146	17	20	23	27	30	330	36	26
27	27	58	86	11	147	8	8	9	0	0	331	1	27
28	28	59	87	8	148	17	20	24	27	30	332	36	28
29	29	—	88	11	149	9	9	0	1	1	333	2	29
30	30	—	89	9	150	18	21	24	27	30	334	36	30
		—		12		0	0	1	2	2		3	
		—		0		18	21	24	27	30		36	
		—				1	1	2	3	3		4	
31	31	—	90	—	151	—	21	24		30			
		—		—		—	2	3		4			

*untuk tahun kabisat menjadi hari ke-60.

5. PEMBAYARAN DENGAN ANGSURAN

Pembayaran secara angsuran atau cicilan sering ditawarkan oleh pemberi kredit (pedagang atau lembaga keuangan) untuk membantu pelanggan yang tidak memiliki uang yang cukup untuk membayar barang yang dibelinya (misalnya televisi, lemari es, mesin cuci, rumah, dan lain-lain). Pihak pemberi kredit setuju menerimanya uang muka pada awal perjanjian dan memperbolehkan pelanggannya untuk melunasi sisanya dengan dikenakan biaya bunga untuk jangka waktu yang telah disepakati bersama dengan membayarnya secara cicilan atau angsuran (*instalment*).

Pada praktiknya, tingkat bunga yang digunakan untuk menghitung besar angsuran dengan cara ini disebut **tingkat bunga flat**.

Contoh 3.17 Seorang pedagang menjual televisi seharga Rp 10.000.000 kepada Pak Abdi. Sebagai tanda jadi, Pak Abdi membayar uang muka sebesar Rp2.000.000 dan berjanji akan mengangsur sisanya dalam 5 kali angsuran yang sama besar setiap akhir bulan dengan bunga sederhana 10% p.a. Hitung besarnya angsuran Pak Abdi tersebut.

Jawab:

$$P = \text{Rp } 8.000.000 \text{ (Rp } 10.000.000 - \text{Rp } 2.000.000)$$

$$r = 10\% = 0,1$$

$$S = P(1+rt)$$

$$= \text{Rp } 8.000.000 \left(1 + \left(0,1 \times \frac{5}{12} \right) \right)$$

$$= \text{Rp } 8.333.333,33$$

Jumlah angsuran setiap bulannya adalah:

$$\frac{S}{5} = \frac{\text{Rp } 8.333.333,33}{5}$$

$$= \text{Rp } 1.666.666,67$$

Contoh 3.18 Ibu Siska meminjam uang dari Bank Paramita sebesar Rp70.000.000. Ia berjanji akan membayar kembali pinjamannya dalam waktu 20 bulan dengan cara menngangsur Rp3.850.000 setiap bulannya. Berapa tingkat bunga sederhana yang dikenakan bank kepada Ibu Siska?

Jawab:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Total pembayaran} & = 20 \times \text{Rp}3.850.000 & = \text{Rp}77.000.000 \\
 \text{Total pinjaman} & & = \text{Rp}70.000.000 - \\
 \text{Total biaya bunga} & & = \underline{\text{Rp } 7.000.000}
 \end{array}$$

$$P = \text{Rp } 70.000.000$$

$$SI = \text{Rp } 7.000.000$$

$$t = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

$$= \frac{\text{Rp } 7.000.000}{\text{Rp } 70.000.000 \times \frac{5}{3}}$$

$$= 6 \% \text{ p.a.}$$

LATIHAN DAN PENYELESAIAN

1. Hitung jumlah hari antara tanggal 19 September 2008 dan 4 Oktober 2010.

Jawab:

Tahun 2008 hari tersedia di bulan September	= 11 hari (30 - 19)
Oktober	= 31 hari
November	= 30 hari
Desember	= 31 hari
Tahun 2009 bukan tahun kabisat, <i>maka</i>	= 365 hari
Tahun 2010 hari tersisa di bulan Januari	= 31 hari
Februari	= 28 hari
Maret	= 31 hari
April	= 30 hari
Mei	= 31 hari
Juni	= 30 hari
Juli	= 31 hari
Agustus	= 31 hari
September	= 30 hari
Oktober	= <u>4 hari</u> +
Jumlah	= 745 hari

2. Hitung bunga tepat (*SI_e*) dan bunga biasa (*SI_o*) dari pinjaman Rp 1.400.000 selama 90 hari dengan tingkat bunga sederhana 7,5% pa.

Jawab:

a. Bunga tepat :

$$P = \text{Rp } 1.400.000$$

$$r = 7,5\% = 0,075$$

$$t = \frac{90}{365}$$

$$SI_e = P r t$$

$$= \text{Rp } 1.400.000 \times 0,075 \times \frac{90}{365}$$

$$= \text{Rp}25.890,41$$

b. Bunga biasa:

$$P = \text{Rp } 1.400.000$$

$$r = 7,5\% = 0,075$$

$$t = \frac{90}{365}$$

$$SI_o = P r t$$

$$= \text{Rp } 1.400.000 \times 0,075 \times \frac{90}{360}$$

$$= \text{Rp}26.250$$

3. Hitung bunga sederhana (*SI*) untuk pinjaman sebesar Rp 4.000.000 selama 3 tahun dengan tingkat bunga 8% p.a.

Jawab:

$$P = \text{Rp } 4.000.000$$

$$r = 8\% = 0,08$$

$$t = 3$$

$$SI = P r t$$

$$= \text{Rp } 4.000.000 \times 0,08 \times 3$$

$$= \text{Rp } 960.000$$

4. Berapa lama waktu yang dibutuhkan uang sebesar R1 1.200.000 untuk dapat inemberikan *SI* Rp 240.000 dengan tingkat bunga sederhana 5% p.a.?

Jawab:

$$P = \text{Rp } 1.200.000$$

$$SI = \text{Rp } 240.000$$

$$r = 5\% = 0,05$$

$$SI = P r t$$

$$\text{Rp}240.000 = \text{Rp } 1.200.000 \times 0,05 \times t$$

$$t = \frac{\text{Rp } 1.200.000 \times 0,05}{\text{Rp } 240.000}$$

$$= 4 \text{ tahun}$$

5. Berapa uang yang harus kita investasikan hari ini supaya berkembang menjadi Rp30.000.000 dalam 5 tahun ke depan dengan tingkat bunga sederhana 12% p.a.?

Jawab:

$$S = \text{Rp}30.000.000$$

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = 5$$

$$S = P(1 + rt)$$

$$\text{Rp}30.000.000 = P(1 + (0,12 \times 5))$$

$$P = \frac{\text{Rp } 30.000.000}{(1+(0,12 \times 5))}$$

$$= \frac{\text{Rp } 30.000.000}{1,6}$$

$$= \text{Rp } 18.750.000$$

6. Seseorang pedagang menawarkan pinjaman sebesar Rp 5.000.000 yang harus dilunasi dalam waktu dua bulan sebesar Rp 6.500.000. Berapa tingkat bunga sederhana tahunan yang dikenakan pinjaman tersebut?

Jawab:

$$S = \text{Rp } 6.500.000$$

$$P = \text{Rp } 5.000.000$$

$$t = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$S = P(1 + rt)$$

$$\text{Rp}6.500.000 = \text{Rp } 5.000.000 (1 + \frac{1}{6} \times r)$$

$$\frac{\text{Rp } 6.500.000}{\text{Rp } 5.000.000} = 1 + \frac{1}{6} r$$

$$1,3 = 1 + 0,1666 r$$

$$0,3 = 0,1666 r$$

$$r = \frac{0,3}{0,1666}$$

$$= 1,8 \text{ atau } 180\%$$

7. Bapak Aditia membeli sebuah kulkas tiga pintu bermerek Samson dari sebuah toko elektronik seharga Rp14.500.000. Sebagai tanda jadi Bapak Aditia membayar uangmuka sebesar Rp 2.500.000 dan berjanji akan mengangsur sisanya dalam 5 kali angsuran yang sama besar setiapakhir bulan dengan tingkat bunga sederhana 12%. Hitung besarnya angsuran yang lunas dibayar Bapak Aditia tersebut.

Jawab:

$$P = \text{Rp}14.500.000 - \text{Rp}2.500.000$$

$$= \text{Rp}12.000.000$$

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = \frac{5}{12}$$

$$S = P(1 + rt)$$

$$= \text{Rp}12.000.000 \left(1 + \left(0,12 \times \frac{5}{12}\right)\right)$$

$$= \text{Rp}12.000.000 (1 + 0,05)$$

$$= \text{Rp}12.000.000 \times 1,05$$

$$= \text{Rp}12.600.000$$

Angsuran per bulan adalah $= \frac{\text{Total Angsuran}}{\text{Jumlah Angsuran}}$

8. Setelah meminjam uang selainya 30 hari, Adi mengembalikan pinjamannya sebesar Rp2.000.000. Apabila atas pinjaman tersebut ini dikenakan bunga 9% p.a. dan Rp2.000.000 tersebut termasuk bunga di dalamnya, berapa pokok pinjaman dan besar bunganya?

Jawab:

$$r = 9\% = 0,09$$

$$t = \frac{30}{365}$$

$$S = \text{Rp}2.000.000$$

$$S = P(1 + rt)$$

$$= P \left(1 + \left(0,09 \times \frac{30}{365} \right) \right) = \text{Rp} 2.000.000$$

$$P + 0,0074P = \text{Rp} 2.000.000$$

$$1,0074P = \text{Rp} 2.000.000$$

$$P = \text{Rp} 1.985.314,11$$

$$SI = \text{Rp} 2.000.000 - \text{Rp}$$

$$1.985.314,11$$

$$= \text{Rp} 14.685,89$$

9. Sejumlah uang diinvestasikan dengan bunga sederhana 8% p.a. berkembang menjadi Rp90.000.000. Dengan bunga sederhana 10% p.a., uagn tersebut berkembang menjadi Rp 105.000,000.Hitung:

a. Berapa uang yang diinvestasikan?

b. Berapa lama waktu investasi?

Jawab:

$$P + 10\% P t = \text{Rp} 105.000.000$$

$$P + 8\% P t = \text{Rp} 90.000.000$$

$$2\% P t = \text{Rp} 15.000.000$$

$$P t = \frac{\text{Rp}750.000.000}{2}$$

(a)

$$\begin{aligned}
P + 8\% P t &= \text{Rp } 90.000.000 \\
P + 8\% (\text{Rp}750.000.000) &= \text{Rp } 90.000.000 \\
P + \text{Rp } 60.000.000 &= \text{Rp } 90.000.000 \\
P &= \text{Rp}90.000.000 - \text{Rp } 60.000.000 \\
&= \text{Rp}30.000.000 \quad (b)
\end{aligned}$$

$$\text{Dari (a) } P t = \text{Rp}750.000.000$$

$$\text{Dan (b) } P = \text{Rp } 30.000.000$$

$$\text{Jadi, } \text{Rp } 30.000.000 \times t = \text{Rp}750.000.000$$

$$t = \frac{750.000.000}{30.000.000}$$

$$= 25$$

Jadi, a. besar uang yang diinvestasikan adalah Rp30.000.000 dan

b. lama investasi adalah 25 tahun.

10. Ibu Timon memiliki dua jenis deposito. Deposito pertama sebesar Rp 7.200.000 dengan bunga sederhana 9% p. a. dan deposito kedua sebesar Rp 7.800.000 mendapatkan bunga sederhana 7,5%. Hitung tingkat bunga yang diperoleh ibu Timon selama setahun atas total depositonya sebesar Rp 15.000.000.

Jawab:

Pendapatan bunga atas deposito pertama per tahun adalah:

$$P = \text{Rp}7.200.000$$

$$r = 9\% = 0,09$$

$$t = 1$$

$$SI_1 = Prt$$

$$= \text{Rp}7.200.000 \times 0,09 \times 1$$

$$= \text{Rp}648.000$$

Pendapatan bunga atas deposito kedua per tahun adalah:

$$P = \text{Rp}7.800.000$$

$$r = 7,5\% = 0,075$$

$$t = 1$$

$$\begin{aligned}SI_2 &= P r t \\ &= \text{Rp } 7.800.000 \times 0.075 \times 1 \\ &= \text{Rp}585.000\end{aligned}$$

Total pendapatan bunga atas seluruh deposito per tahun:

$$\begin{aligned}SI &= SI_1+SI_2 \\ &= \text{Rp } 648.000 + \text{Rp } 585.000 \\ &= \text{Rp } 1.233.000\end{aligned}$$

Tingkat bunga rata-rata atas kedua deposito tersebut adalah:

$$\begin{aligned}r &= \frac{\text{Total Bunga}}{\text{Total Deposito}} \\ &= \frac{\text{Rp } 1.233.000}{\text{Rp } 7.200.000+\text{Rp } 7.800.000} \\ &= 0,0822 \text{ atau } 8,22 \% \text{ p.a.}\end{aligned}$$

SOAL

1. Tiga bulan setelah meminjam uang, Mutia membayar sebesar Rp12.000.000 untuk pelunasan pokok pinjaman dan bunganya. Apabila diketahui bunga adalah 15% p.a., berapa besarnya pinjaman Mutia?
2. Setelah menahung Rp 25.000.000 di Baiik Merdeka selama 3 tahun, tabungan Santiberkembang menjadi Rp42.750.000. Berapa tingkat bunga sederhana yang diberikan oleh Bank Merdeka?
3. Seorang nasabah menginvestasikan uangnya selama setahun dengan bunga sederhana. Untuk tiga bulan pertama ia menerima bunga sebesar 15% dan untuk sembilan bulan sisanya ia menerima bunga 12%. Berapakah total uang yang diinvestasikan apabila total pendapatan bunga yang diterima pada akhir tahun pertamanya sebesar Rp 8.640.000?
4. Pada tanggal 1 Mei 2010, Maya meminjam uang kepada Debora sebesar Rp 10.000.000 dan ia dikenakan bunga 18%. Pada tanggal 31 Juli 2010 ia membayar Rp5.000.000 dan kemudian Rp4.000.000 pada tanggal 30 September 2010. Berapakah saldo pinjaman yang tersisa per 31 Oktober 2010?
5. Sejumlah uang diinvestasikan dengan bunga 15% p.a. berkembang menjadi Rp43.000.000. Apabila diinvestasikan dengan tingkat bunga sederhana 12% p.a., uang tersebut berkembang menjadi Rp42.400.000.
 - a. Berapa nilai uang yang diinvestasikan?
 - b. Berapa lama Waktu investasi yang diperlukan?
6. Seorang pekerjameminjam Rp7.000.000 dari kantor tempatnya bekerja dan ia bersedia untuk membayar pinjamannya itu dengan cara mengangsur yaitu sebesar Rp385.000 setiap bulan selama 20 bulan. Berapa tingkat bunga sederhana yang dikenakan kantor kepada pekerja tersebut?
7. Sebuah bank terkemuka menetapkan tingkat bunga sederhana tabungan sebesar 12% p.a. Jika Gima membuka rekening pada tanggal 1 Januari sebesar Rp225.000 dan melakukan penarikan tabungan sebesar Rp 100.000 pada tanggal 1 Juli, berapa pendapatan bunga yang ia peroleh di akhir tahun pertamanya?

8. Pada tanggal 1 Januari 2010, Pak Amat, pedagang kecil, ingin memperluas toko kelontongnya. Untuk tujuan tersebut ia meminjam uang dari bank ABC sebesar Rp 1.000.000 dengan bunga 16%. Pada tanggal 1 April 2010, ia membayar kembali pinjamannya sebesar Rp 350.000, kemudian pada tanggal 1 Agustus 2010 ia membayar Rp 200.000, dan pada tanggal 1 Oktober 2010 sebesar Rp 400.000. Berapa sisa pembayaran yang harus ia selesaikan pada tanggal 1 Januari 2011, jika bunga dihitung harian?
9. Tia menabung sebesar Rp 2.000.000 pada tanggal 1 Januari 2010 di sebuah bank yang memberikan bunga sederhana 9% p.a. Jika ia mengharapkan untuk mempunyai tabungan sebesar Rp 4.000.000 untuk bepergian dan belanja ke Singapura pada tahun baru tanggal 1 Januari 2011. Berapa tabungan yang harus ia setorkan lagi pada tanggal 1 Juli 2010?
10. Ibu Zeta memiliki dua jenis deposito. Deposito kedua besarnya dua kali deposito pertama. Bunga deposito pertama 10% p.a. dan deposito kedua 12%. Jika total bunga yang didapat dari kedua deposito itu sebesar Rp 33.400.000 setahun, berapa besarnya masing-masing deposito?

Bab 4

Tingkat Diskon dan Diskon Tunai

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar kata diskon (*discount*). Banyak barang dijual dengan harga diskon untuk menarik minat pembeli. Untuk mendorong pembayaran lebih cepat, penjual juga tidak jarang menawarkan diskon tunai kepada para pembeli kreditnya untuk pelunasan lebih cepat sebelum jatuh tempo. Selain itu, tingkat diskon pun digunakan untuk menghitung bunga wesel atau bunga pinjaman yang dipotong di muka.

Potongan bunga di muka ini menyebabkan tingkat bunga efektif yang dikenakan menjadi lebih tinggi jika dibandingkan dengan pembayaran bunga yang dilakukan di akhir periode.

1. DISKON DAN TINGKAT DISKON

Pada Bab 1, kita telah membahas faktor diskon atau pendiskontoan dengan bunga sederhana, yaitu proses menghitung Pdcngan diherikan S, r,dan t. Selisih S-P atau D disebut **diskon sederhana** (*simple discount*) atau **diskon bank** (*bank discount*) pada tingkat bunga tertentu.

Selanjutnya dalam buku ini, *simple discount* atau *bank discount* akan disebut **diskon**(*discount*).

Contoh 4.1 Berapa besarnya diskon dan Rp8.000.000 selama 9 bulan pada tingkat bunga 10% p.a.

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp } 8.000.000 \\ r &= 10\% = 0,1 \\ t &= \frac{9}{12} = 0,75 \\ P &= \frac{S}{(1+rt)} \\ &= \frac{\text{Rp } 8.000.000}{(1+(0,1 \times 0,75))} \\ &= \text{Rp } 7.441.860,47 \\ D &= S-P \\ &= \text{Rp } 8.000.000 - \text{Rp } 7.441.860,47 \\ &= \text{Rp } 558.139,53 \end{aligned}$$

Jika yang diberikan bukan tingkat bunga (r) tetapi tingkat diskon (d) maka kita perlu menggunakan persamaan lain yang menghubungkan variabel D (diskon) dengan S (jumlah nominal akhir), d (tingkat diskon), dan t (waktu).

Diskon (D) dan jumlah S selama t tahun dengan tingkat diskon (*discount rate*) d adalah:

$$D = Sdt \tag{7}$$

Sedangkan

$$P = S - D \quad (8)$$

Dengan melakukan substitusi Persamaan (7) ke dalam Persamaan (8). kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} P &= S - D \\ P &= S - (S d t) \\ P &= S(1 - d t) \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan persamaan terakhir, kita melihat bahwa bunga. Lebih tepatnya diskon, dapat dihitung dan nilai akhir (S) dengan menggunakan tingkat diskon, selain menggunakan tingkat bunga. Hal ini sering dilakukan terutama untuk pinjaman jangka pendek. Pemberi pinjaman menghitung diskon (D) dan S atau nilai yang seharusnya dibayar pada tanggal jatuh tempo dengan menggunakan tingkat diskon (*discount rate*) dan bukan menggunakan tingkat bunga (*interest rate*). Oleh karena itu, istilah diskon sering juga disebut sebagai bunga dipotong di muka.

Perbedaan tingkat bunga dan tingkat diskon hanya berlaku untuk sekuritas pasar uang dan tidak untuk sekuritas lainnya (saham dan obligasi). Untuk angka menengah atau panjang (lebih dari satu tahun), tingkat diskon dan tingkat bunga berarti sama sehingga hanya ada satu persamaan untuk mencari nilai sekarang (pendiskontoan). Artinya, jika digunakan dalam jangka menengah dan jangka panjang, tingkat bunga adalah tingkat diskon, dan sebaliknya.

2. MANIPULASI PERSAMAAN DISKON

Dari Persamaan (9). kita juga dapat menyatakan S dalam P , d , dan t . yaitu sebagai berikut:

$$S = \frac{P}{(1-dt)} \quad (10)$$

Persamaan ini sering digunakan untuk menghitung nilai akhir atau nilai jatuh tempo dan sebuah pinjaman sebesar P yang sudah diterima di muka.

Contoh 4.2 Bapak Tri meminjam Rp50.000.000 selama 6 bulan dan sebuah bank yang mengenakan tingkat diskon 12%. Berapa besarnya diskon dan uang yang diterima Bapak Tri?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}50.000.000 \\ d &= 12\% = 0,12 \\ t &= \frac{6}{12} = 0,5 \\ D &= S d t \\ &= \text{Rp}50.000.000 \times 0,12 \times 0,5 \\ &= \text{Rp}3.000.000 \end{aligned}$$

Maka uang yang diterima Bapak Tri adalah:

$$\begin{aligned} P &= S - D \\ &= \text{Rp}50.000.000 - \text{Rp}3.000.000 \end{aligned}$$

$$= \text{Rp}47.000.000$$

Contoh 4.3 Melanjutkan contoh di atas, berapa pinjaman yang harus Bapak Tri ajukan supaya ia dapat menerima uang tunai sebesar Rp50.000.000 secara penuh?

Jawab:

$$\begin{aligned} P &= \text{Rp}50.000.000 \\ d &= 12\% = 0,12 \\ t &= 0,5 \\ S &= \frac{P}{(1-dt)} \\ &= \frac{\text{Rp}50.000.000}{(1 - (0,12 \times 0,5))} \\ &= \text{Rp}53.191.489,36 \end{aligned}$$

Supaya memperoleh Rp50.000.000 secara penuh, Bapak Tri harus mengajukan pinjaman sebesar Rp 53.191.489,36.

Contoh 4.4 Hitung nilai sekarang (*present value*) dan Rp 10.000.000 yang jatuh tempo 1 tahun lagi dengan:

- a. Tingkat bunga 10%.
- b. Tingkat diskon 10%.

Jawab:

$$\text{a. } S = \text{Rp } 10.000.000$$

$$r = 10\% = 0,1$$

$$t = 1$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{S}{(1+rt)} \\ &= \frac{\text{Rp } 10.000.000}{(1+(0,1 \times 1))} \\ &= \text{Rp}9.090.909,09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } S &= 10.000.000 \\ d &= 10\% = 0,1 \\ P &= S(1 - dt) \\ &= \text{Rp}10.000.000(1 - (0,1 \times 1)) \\ &= \text{Rp}9.000.000 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa di antara kedua jawaban di atas terdapat selisih sebesar Rp90.909,09. Penggunaan tingkat diskon selalu memberikan keuntungan yang lebih besar kepada pemberi pinjaman (dalam kasus ini adalah bank) dibandingkan dengan pengguna tingkat bunga yang besarnya sama. Kita dapat menghitung tingkat bunga yang ekuivalen dengan tingkat diskon tertentu dan juga sebaliknya, mencari tingkat diskon yang ekuivalen dengan tingkat bunga tertentu.

Tingkat diskon (d) dan tingkat bunga (r) adalah ekuivalen jika kedua variabel tersebut memberikan nilai sekarang (PV) yang sama untuk nilai S yang sama di kemudian hari.

Dengan menggunakan Persamaan (6) dan Persamaan (9), kita dapat menghasilkan persamaan baru:

$$\frac{S}{(1+rt)} = S (1 - dt)$$

$$\frac{1}{(1+rt)} = 1 - dt$$

$$\frac{1}{(1-dt)} = 1 + rt$$

$$\frac{1}{(1-dt)} - 1 = rt$$

$$\frac{1(1-dt)}{1-dt} = rt$$

$$\frac{dt}{(1-dt)} = rt$$

$$\frac{d}{(1-dt)} = r \tag{11}$$

Dengan cara yang sama, kita juga dapat menghitung tingkat diskon yang Ekuivalen dengan tingkat bunga tertentu, sebagai berikut:

$$\frac{S}{(1+rt)} = S (1 - dt)$$

$$\frac{1}{(1+rt)} = 1 - dt$$

$$1 - \frac{1}{(1+rt)} = dt$$

$$\frac{(1+rt)-1}{(1+rt)} = dt$$

$$\frac{rt}{(1+rt)} = dt$$

$$\frac{r}{(1+rt)} = d$$

Contoh 4.5 Jika diketahui tingkat diskon sebuah bank adalah 9%, berapa tingkat bunga yang ekuivalen untuk $t = 1$?

Jawab:

$$d = 9\% = 0,09$$

$$\begin{aligned}
 t &= 1 \\
 r &= \frac{d}{(1-dt)} \\
 &= \frac{0,09}{(1-(0,09 \times a))} = 9,89 \%
 \end{aligned}$$

Contoh 4.6 Jika diketahui tingkat bunga sebuah bank adalah 10%, berapa tingkat diskon yang ekuivalen uniuik periode 6 bulan?

Jawab:

$$\begin{aligned}
 r &= 10\% = 0,10 \\
 t &= \frac{6}{12} = 0,5 \\
 d &= \frac{r}{(1+rt)} \\
 &= \frac{0,10}{(1+(0,10 \times 0,5))} \\
 &= 9,52 \%
 \end{aligned}$$

3. WESEL

Wesel (*promissory notes*) adalah janji tertulis seorang debitur atau pembuat wesel untuk membayar kepada atau atas perintah dari kreditur atau penerima wesel sejumlah uang, dengan bunga atau tanpa bunga dan pada tanggal tertentu. *Promissory notes* sering disingkat *Pro-notes* atau *P-notes*. *Promissory notes* yang mengandung bunga disebut **wesel berbunga** (*interest - hearing notes*), sedangkan yang tidak berbunga disebut **wesel tidak berbunga** (*non-interest hearing note*). Dalam akuntansi, *promissory note* juga disebut **wesel tagih** (*notes receivable*) untuk yang menerima dan **wesel bayar** (*notes payable*) untuk yang membuat.

Berikut adalah sebuah contoh paling sederhana dan wesel berbunga dengan nilai nominal Rp 100.000.000. Tanggal penerbitan wesel tersebut adalah 1 Juli 2010 dan jatuh tempo dalam 60 hari atau tanggal 30 Agustus 2010 dengan bunga 11%. Nilai wesel pada saat jatuh tempo adalah Rp 100.000.000 x (1 + 0,11(60/365)) = Rp 101 .808.219,20.

Rp 100.000.000 (seratus juta rupiah)	Depok, 1 Juli 2010
Enam puluh hari terhitung dari hari ini, saya berjanji untuk membayar kepada Tuan Bachtiar	
<p>Seratus Juta Rupiah Beserta bunga sebesar 11% p.a.</p>	
Tanda tangan, Achmad	

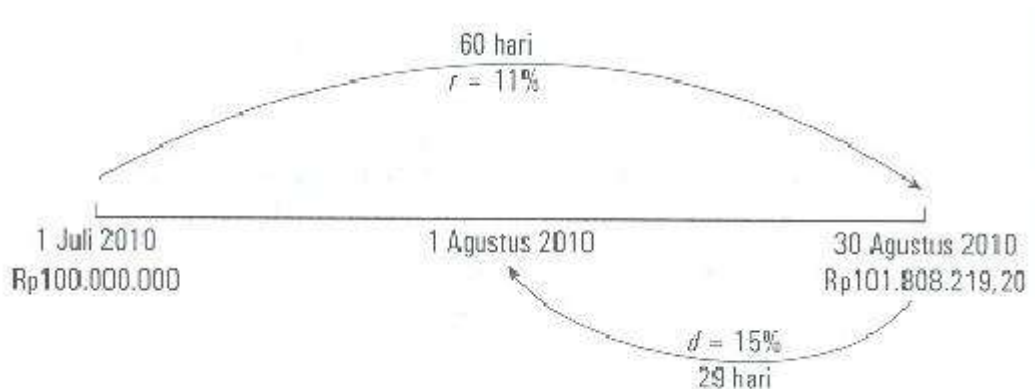
Sebuah wesel dapat dijual satu atau berulang kali sebelum tanggal jatuh temponya. Setiap pembeli akan menghitung diskon dan tanggal penjualan hingga tanggal jatuh tempo menggunakan tingkat diskonnya. Nilai jatuh tempo dikurangi diskon adalah nilai yang akan diterima oleh penjual.

Contoh 4.7 Jika wesel yang ditandatangani Tuan Achmad di atas pada tanggal 1 Agustus 2010 dijual oleh Tuan Bachtiar kepada Bank AAA dengan menggunakan tingkat diskon 15%, hitung:

- Berapa nilai yang akan diterima Tuan Bachtiar?
- Berapa tingkat bunga yang akan diterima bank atas investasinya dalam wesel di atas jika wesel tersebut dipegang hingga tanggal jatuh tempo?
- Berapa tingkat bunga yang didapat Tuan Bachtiar ketika ia menjualnya pada 1 Agustus 2010?

Jawab:

a. Pertama kita perlu membuat diagram waktu dan nilai sebagai berikut:



Nilai jatuh tempo wesel adalah:

$$\begin{aligned}
 S &= \text{Rp } 100.000.000 \times \left(1 + \left(0,11 \times \frac{60}{365}\right)\right) \\
 &= \text{Rp } 101.808.219,2
 \end{aligned}$$

Nilai yang diterima penjual pada 1 Agustus 2010 adalah:

$$\begin{aligned}
 P &= \text{Rp } 101.808.219,2 \left(1 - \left(0,15 \times \frac{29}{365}\right)\right) \\
 &= \text{Rp } 100.594.888,4
 \end{aligned}$$

b. Bank akan memperoleh Rp 1.213.330,8 (Rp101.808.219,2 - Rp 100.594.888,4) untuk investasi sebesar Rp 100.594.888,4 selama 29 hari..

Jadi:

$$P = \text{Rp } 100.594.888,4$$

$$SI = \text{Rp } 1.213.330,8$$

$$t = 29 \text{ hari}$$

Maka :

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

$$= \frac{Rp\ 1.213.330,8}{Rp\ 100.594.888,4 \times \frac{29}{365}}$$

$$= 0,15181 \text{ atau } 15,18\%$$

Cara lain adalah menghitung r yang ekuivalen dengan d = 15%:

$$r = \frac{d}{(1 - dt)}$$

$$= \frac{0,15}{1 - \left(0,15 \times \frac{29}{365}\right)} = 0,15181 = 15,18\%$$

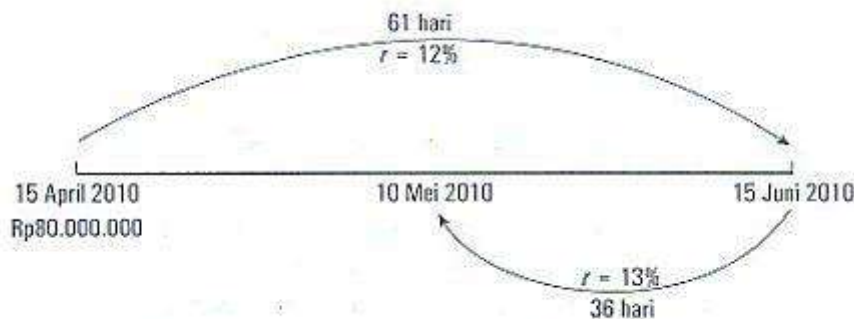
- c. Tuan Bachtiar mendapatkan bunga sebesar Rp 594.888,4 untuk investasi Rp 100.000.000 selama 31 hari. Tingkat bunga yang ia dapat adalah:

$$r = \frac{SI}{Pt}$$

$$= \frac{Rp\ 594.888,4}{Rp\ 100.000.000 \times \frac{31}{365}} = 0,07004 = 7\%$$

Contoh 4.8 Pada tanggal 15 April 2010, Tuan Emil menandatangani wesel bernilai Rp80.000.000. Wesel tersebut akan jatuh tempo dalam dua bulan dengan bunga 12%. Pada tanggal 10 Mei 2010, pemegang wesel tersebut menjualnya ke bank yang mengharapkan tingkat bunga 13%. Berapa nilai yang akan diterima pemegang wesel ?

Jawab:



Nilai jatuh tempo wesel adalah :

$$S = Rp\ 80.000.000 \times \left(1 + \left(0,12 \times \frac{61}{365}\right)\right)$$

$$= Rp\ 81.604.383,56$$

Nilai yang diterima pemegang wesel adalah :

$$\begin{aligned}
P &= \text{Rp } 81.604.383,56(1+(0,13 \times \frac{36}{365})) \\
&= \text{Rp } 80.571.304,91
\end{aligned}$$

Contoh 4.9 Pada tanggal 21 April 2010, Khalid membeli barang seharga Rp 5.000.000. Jika membayar tunai, ia akan mendapatkan diskon (potongan) sebesar 4%. Untuk memanfaatkan potonga ini, ia menandatangani sebuah wesel tanpa bunga berjangka waktu 90 hari di bank yang mengenakan tingkat diskon 9%. Berapa nilai nominal wesel tersebut agar pedagang tadi mendapatkan jmlah uang tunai (kas) yang pas untuk pembayaran barangnya?

Jawab:

Potongan tunai = 4% × Rp 5.000.000 = Rp 200.000
Pedagang tersebut membutuhkan uang tunai:

$$\begin{aligned}
P &= \text{Rp } 5.000.000 - \text{Rp } 200.000 \\
&= \text{Rp } 4.800.000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \text{Rp. } 4.800.000 \\
d &= 9\% = 0,09 \\
t &= 90 \text{ hari}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{P}{(1-dt)} \\
&= \frac{\text{Rp } 4.800.000}{(1-(0,09 \times \frac{90}{365}))} \\
&= \text{Rp } 4.908.938,08
\end{aligned}$$

4. DISKON TUNAI

Untuk mendorong pembayaran yang lebih cepat, banyak produsen dan pedagang grosir menawarkan potongan tunai untuk pembayaran jauh sebelum tanggal jatuh tempo. Biasanya, besarnya potongan dan syaratnya dinyatakan dalam **termin kredit** (*Credit Terms*), seperti 2/10, n/30, yang artinya **diskon tunai** atau **potongan tunai** (*Cash Discount*) sebesar 2% akan diberikan jika pembayaran dilakukan dalam waktu 10 hari. Jika tidak, jumlah keseluruhan harus dilunasi dalam waktu 30 hari.

Pembeli yang akan memanfaatkan potongan tunai, pada praktiknya akan menerima potongan atau bunga di muka dalam bentuk diskon tunai. Tingkat bunga efektif yang didapatkan dengan cara ini biasanya sangat tinggi.

Contoh 4.10 Seorang pedagang membeli sebuah peralatan kantor seharga Rp40.000.000 dengan termin kredit 4/30, n/100. Berapakah tingkat bunga efektif yang ditawarkan kepada pedagang tadi? (Catatan: Jika pedagang tadi ingin rnendapatkan potongan, maka ia akan membayarnya pada hari ke-30, dan jika tidak, ia harus membayar barang yang dibelinya pada hari ke- 100 atau ada perbedaan waktu 70 hari.)

Jawab:

Perbedaan jumlah yang dibayarkan atau diskon adalah 4%, atau sebesar
 $\text{Rp } 40.000.000 \times 4\% = \text{Rp } 1.600.000$.

$$\begin{aligned} P &= \text{Rp } 40.000.000 - \text{Rp } 1.600.000 \\ &= \text{Rp } 38.400.000 \\ SI &= \text{Rp } 1.600.000 \end{aligned}$$

$$t = \frac{70}{365}$$

Cara 1:

$$\begin{aligned} r &= \frac{SI}{Pt} \\ &= \frac{\text{Rp } 1.600.000}{\text{Rp } 38.400.000 \times \left(\frac{70}{365}\right)} \\ &= 0,21726 \\ &= 21,73\% \end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned} r &= \frac{365}{70} \times \frac{0,04}{0,96} \\ &= 0,21726 \\ &= 21,73\% \end{aligned}$$

Seandainya pedagang tadi tidak memiliki uang tunai, tetapi memiliki akses untuk meminjam, maka tingkat bunga tertinggi yang masih menguntungkan pedagang tadi untuk meminjam guna mengambil diskon di atas adalah 21,73%. Jika tingkat bunga pinjaman lebih rendah dari 21,73%, pedagang tersebut sebaiknya meminjam karena diskon tunai yang didapat lebih besar daripada beban bunga yang harus dibayar untuk periode waktu yang sama.

LATIHAN DAN PENYELESAIAN BAB 4

1. Berapa besarnya diskon dari uang sejumlah Rp200.000.000 selama 6 bulan pada tingkat diskon 10% p.a.?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}200.000.000 \\ d &= 10\% = 0,1 \\ t &= \frac{6}{12} = 0,5 \\ D &= S d t \\ &= \text{Rp}200.000.000 \times 0,1 \times 0,5 \\ &= \text{Rp} 10.000.000 \end{aligned}$$

2. Berapa besarnya diskon dan uang sejumlah Rp 15.000.000 selama 8 bulan pada tingkat bunga 12% pa.?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}15.000.000 \\ r &= 12\% = 0,12 \\ t &= \frac{8}{12} \end{aligned}$$

$$D = S - P$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{S}{(1+rt)} \\ &= \frac{\text{Rp} 15.000.000}{(1+(0,12 \times \frac{8}{12}))} \end{aligned}$$

$$= \text{Rp}13.888.888,89$$

$$D = S - P$$

$$\begin{aligned} &= \text{Rp}15.000.000 - \text{Rp} 13.888.888,89 \\ &= \text{Rp}1.111.111,11 \end{aligned}$$

3. Karina meminjam Rp500.000 selama 6 bulan dan Brutus yang memberikan tingkat diskon 9%. Berapa besarnya diskon yang dikenakan dan berapa jumlah yang akan diterima Karina?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp} 500.000 \\ d &= 9\% = 0,09 \\ t &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$D = S d t$$

$$= \text{Rp}500.000 \times 0,09 \times \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Rp}22.500 \\
 S - D &= \text{Rp } 500.000 - \text{Rp } 22.500 \\
 &= \text{Rp}47. 500
 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya diskon adalah Rp22.500 dan jumlah yang diterima Karina adalah Rp 477.500

4. Melanjutkan Soal No. 3 di atas, apabila Karina ingin menerima tepat Rp500.000. berapa jumlah yang harus ia ajukan?

Jawab:

$$\begin{aligned}
 d &= 9\% = 0,09 \\
 t &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$S - D = \text{Rp } 500.000$$

$$\begin{aligned}
 D &= S d t \\
 &= 4,5\% S
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S - 4,5\%S &= \text{Rp } 500.000 \\
 95,5\% S &= \text{Rp}500.000 \\
 S &= \text{Rp}523.560
 \end{aligned}$$

5. Hitung nilai sekarang uang sejumlah Rp60.000.000 yang jatuh tempo 1 tahun lagi **dengan** tingkat bunga 12%.

Jawab:

$$\begin{aligned}
 S &= \text{Rp } 60.000.000 \\
 r &= 12\% = 0,12 \\
 t &= 1 \\
 P &= \frac{S}{(1+rt)} \\
 &= \frac{\text{Rp } 60.000.000}{(1+(0,12 \times 1))} \\
 &= \text{Rp } 53.571.428,57
 \end{aligned}$$

6. Berapa tingkat bunga efektif dari termin kredit 2/10, n/30 untuk pembayaran tunai lebih cepat?

Jawab:

$$\begin{aligned}
 t &= 30 - 10 = 20 \\
 &= \frac{20}{365}
 \end{aligned}$$

Tingkat diskon = 2%

$$r = \frac{365}{20} \times \frac{0,02}{0,98}$$

$$= 0,3724 = 37,24\%$$

7. Jika diketahui tingkat diskon sebuah bank adalah 12%, berapa tingkat bunga yang ekuivalen untuk periode 6 bulan?

Jawab:

$$d = 12\% = 0,12$$

$$t = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$r = \frac{d}{(1 - dt)}$$

$$= \frac{0,12}{(1 - (0,12 \times 0,5))}$$

$$= \frac{0,12}{0,94}$$

$$= 12,77\%$$

8. Jika diketahui tingkat bunga sebuah bank adalah 12%, berapa tingkat diskon yang ekuivalen untuk periode 3 bulan?

Jawab:

$$r = 12\% = 0,12$$

$$t = \frac{3}{12} = 0,25$$

$$d = \frac{r}{1 + rt}$$

$$= \frac{0,12}{1 + 0,12(0,25)}$$

$$= \frac{0,12}{1,03}$$

$$= 11,65\%$$

9. Pak Abdullah berjanji akan membayar pinjamannya dengan menerbitkan sebuah wesel berbunga 19% berjangka waktu 60 hari senilai Rp20.000.000. Dalam 30 hari sebelum jatuh tempo. Wesel tersebut didiskontokan kepada bank yang mengenakan tingkat diskon 21%. Hitung berapa hasil penjualan tersebut.

Jawab:

$$P = \text{Rp}20.000.000$$

$$r = 19\% = 0,19$$

$$d = 21\% = 0,21$$

$$t \text{ hingga jatuh tempo} = 60 \text{ hari} = \frac{60}{365}$$

$$t \text{ pendiskoritoan} = 30 \text{ hari} = \frac{30}{365}$$

Nilai jatuh tempo wesel adalah:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}20.000.000 \times \left(1 + \left(0,19 \times \frac{60}{365}\right)\right) \\ &= \text{Rp} 20.624.657,53 \end{aligned}$$

Nilai yang diterima pada saat didiskontokan adalah:

$$\begin{aligned} P &= \text{Rp}20.624.657,53 \times \left(1 - \left(0,21 \times \frac{30}{365}\right)\right) \\ &= \text{Rp}20.268.670,29 \end{aligned}$$

10. Berapa tingkat bunga yang membuat uang sebesar Rp12.000.000 untuk 8 bulan mendatang rnernpunyai nilai sekarang Rp 11.320.754,72?

Jawab:

$$S = \text{Rp}12.000.000$$

$$t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} PV &= P \\ &= \text{Rp} 11.320.754,72 \end{aligned}$$

$$P = \frac{S}{(1+rt)}$$

$$\text{Rp} 11.320.754,72 = \frac{\text{Rp}12.000.000}{1+(r \times \frac{2}{3})}$$

$$1 + \frac{2}{3}r = \frac{\text{Rp}12.000.000}{\text{Rp} 11.320.754,72}$$

$$\frac{2}{3}r = \frac{\text{Rp}12.000.000}{\text{Rp} 11.320.754,72} - 1$$

$$\frac{2}{3}r = 0,06$$

$$r = \frac{2}{3} \times 0,06$$

$$= 0,09 = 9\%$$

Cara lain adalah dengan langsung menggunakan persamaan (3).

SOAL BAB 4

1. Sebuah wesel tanpa bunga bernilai nominal Rp 1.000.000 yang jatuh tempo pada 20 September dijual dengan harga Rp 970.000 pada 22 Juli. Berapa besarnya tingkat diskon yang dikenakan?
2. Tuan A meminjam kepada Tuan B sebesar Rp 100.000.000. Tuan A bersedia membuatkan wesel 90 hari berbunga 8% dengan nilai nominal sedikit di atas Rp100.000.000 yang dapat didiskontokan langsung kepada bank yang akan memberikan diskon sebesar 10%. Berapa nilai nominal wesel tersebut agar Tuan B dapat menerima kembali uangnya yang sebesar Rp100.000.000 tersebut?
3. Ibu Anne memiliki wesel sebesar Rp 50.000.000 tertanggal 17 Oktober 2009. Wesel tersebut akan jatuh tempo dalam 120 hari dengan bunga 19%. Apabila pada tanggal 15 Januari 2010, Ibu Anne menjual wesel tersebut kepada bank yang mengenakan tingkat diskon 20%, berapa hasil yang ia peroleh?
4. Tumino meminjam uang kepada Bank Merdeka sebesar Rp 250.000.000 untuk jangka waktu 6 bulan. Apabila pihak bank mengenakan tingkat diskon 12%, berapa besarnya nilai diskon dan uang tunai yang akan diperoleh Tumino?
5. Pada tanggal 15 April 2010, seorang debitur menandatangani wesel senilai Rp500.000.000 yang akan jatuh tempo dalam dua bulan dengan bunga 12%, p.a. Pada tanggal 10 Mei 2010, pemegang wesel tersebut menjual wesel kepada Bank Central yang memberikan diskon 13%. Berapa nilai wesel tersebut pada saat jatuh tempo dan pada tanggal penjualan?
6. Antonio meminjam uang Rp50.000.000 untuk 8 bulan dan Anita dikenakan tingkat diskon 16%. Hitung:
 - a. Berapa uang yang akan diterima oleh Antonio?
 - b. Berapa pinjaman yang seharusnya dimohon kepada Anita apabila ia ingin mendapatkan uang sejumlah Rp50.000.000 secara penuh?
7. Seorang pedagang membeli peralatan senilai Rp80.000.000, termin kredit $3/10, n/40$.
 - a. Seandainya pedagang di atas tidak memiliki uang tunai, tetapi dapat meminjam, berapa tingkat bunga tertinggi yang masih menguntungkan pedagang tadi untuk meminjam guna mengambil diskon tunai di atas?
 - b. Berapa besar pinjaman yang harus ia ajukan?
 - c. Apabila pedagang tersebut dapat melakukan pinjaman dengan bunga 21%, berapa keuntungan yang ia peroleh dan diskon tunai, jika ia membayar barang yang dibelinya dalam waktu 10 hari?

8. Sebuah wesel senilai Rp2.000.000, jangka waktu 60 hari, bunga 11% dikeluarkan oleh Pak Bandira tanggal 1 September 2010. Wesel tersebut digunakan untuk membayar utang kepada Ibu Anita. Pada tanggal 1 Oktober 2010, Ibu Anita mendiskontokan wesel yang ia peroleh dan Bapak Bandira kepada Bank Indika dengan tingkat diskon 9,5%. Hitung:
- Berapa yang Ibu Anita terima dan bank?
 - Berapa tingkat bunga yang akan diterima bank atas investasinya dalam wesel di atas jika wesel tersebut dipegang hingga tanggal jatuh tempo?
 - Berapa tingkat bunga yang didapat Ibu Anita jika Ia menjualnya pada tanggal 1 Oktober 2010?
9. Seorang pedagang membeli persediaan dari pemasok langganannya seharga Rp 5.000.000. Ia membayarnya dengan menerbitkan wesel tanpa bunga berjangka waktu 60 hari yang jika dikenakan tingkat diskon 18% akan menghasilkan Rp8.000,000. Berapa nilai wesel yang seharusnya dicantumkan oleh pedagang tersebut?
10. Berapa tingkat bunga yang membuat uang sebesar Rp 15.000.000 untuk 8 bulan mendatang mempunyai nilai sekarang Rp 14.000.000?

BAB 5

Bunga Majemuk

1. PENGERTIAN BUNGA MAJEMUK

Sampai saat ini, kita mengasumsikan bahwa P atau nilai pokok tidak mengalami perubahan dari awal hingga akhir sehingga nilai bunga selalu dihitung dari nilai pokok ini, hal ini disebut bunga sederhana. Dengan bunga majemuk, bunga yang jatuh tempo ditambahkan ke nilai pokok pada akhir setiap periode *compound* atau periode perhitungan bunga untuk mendapatkan pokok yang baru. Perhitung bunga untuk periode berikutnya akan didasarkan pada nilai pokok baru ini dan bukan pada nilai pokok awal, begitu seterusnya.

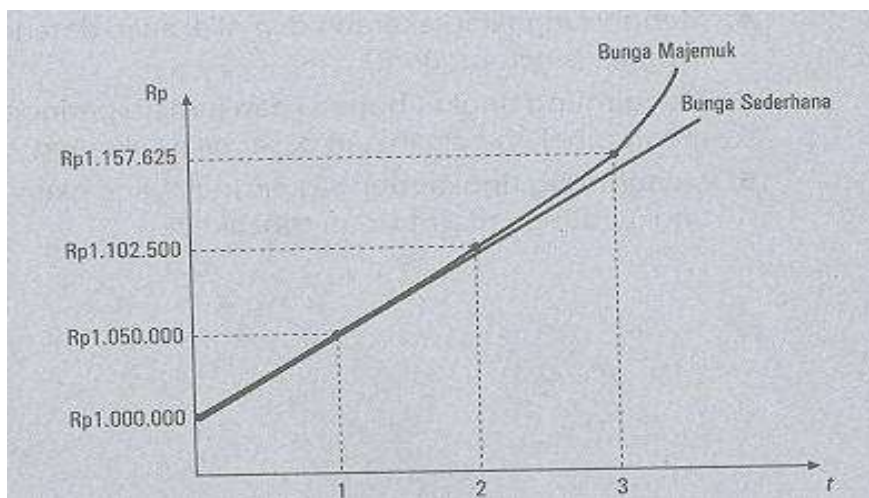
Periode perhitungan bunga adalah periode bunga dihitung untuk ditambahkan ke pokok. Periode perhitungan bunga tidak harus satu tahun walaupun tingkat bunga selalu dinyatakan per tahun. Periode perhitungan bunga dapat dinyatakan dalam mingguan, bulanan, triwulanan, semesteran, atau tahunan. Jika periode perhitung bunga bukan tahunan, misalkan bulanan, maka tingkat bunga juga harus dalam bulan, yaitu dengan membagi tingkat bunga tahunan dengan dua belas.

Konsep bunga majemuk akan digunakan untuk penghitungan anuitas amortisasi utang, dan obligasi yang akan dibahas di bab-bab berikutnya.

Contoh 5.1 Hitung bunga dan Rp 1.000.000 selama 2 tahun dengan tingkat bunga 10% p.a. apabila bunga dihitung semesteran dan bandingkan dengan bunga sederhana yang dihasilkan.

Jawab:

Periode	Pokok Pinjaman (Rp)	Perhitungan Bunga Majemuk	Nilai Akhir Periode (Rp)
1	1.000.000	$Rp\ 1.000.000 \times 0,05 = Rp\ 50.000$	1.050.000,00
2	1.050.000	$Rp\ 1.050.000 \times 0,05 = Rp\ 52.500$	1.102.500,00
3	1.102.500	$Rp\ 1.102.500 \times 0,05 = Rp\ 55.125$	1.157.625,00
4	1.157.625	$Rp\ 1.157.625 \times 0,05 = Rp\ 57.881,25$	1.215.506,25



Grafik 5.1 Pertumbuhan Uang

Jadi, total bunga majemuk selama dua tahun adalah Rp215.506,25; sedangkan bila menggunakan bunga sederhana, total bunganya adalah Rp200.000 ($Rp1.000.000 \times 10\% \times 2$). Perbedaan pertumbuhan uang dengan bunga sederhana dan bunga majemuk pada contoh di atas dapat kita gambarkan pada Grafik 3.1.

Untuk mempermudah perhitungan bunga majemuk kita akan menggunakan notasi sebagai berikut:

P = nilai pokok awal (*principal*)

S = nilai akhir

n = jumlah periode perhitungan bunga

m = frekuensi perhitungan bunga dalam setahun, yaitu 2 untuk semesteran, 4 untuk triwulan, dan seterusnya

j_m = tingkat bunga nominal tahunan dengan periode perhitungan m kali per tahun

i = tingkat bunga per periode perhitungan bunga.

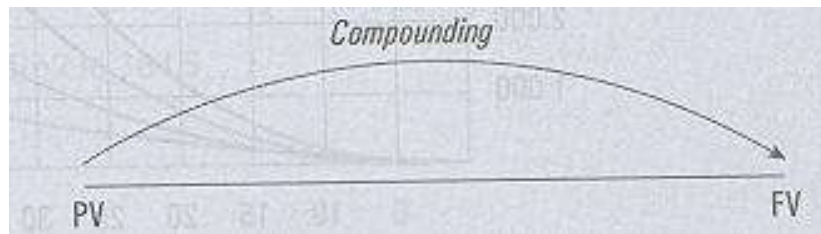
Selain itu, diasumsikan bahwa mahasiswa menggunakan *scientific calculator* yang mempunyai tombol x^n dan pembulatan angka desimal hanya dilakukan dalam jawaban akhir. Perhatikan bahwa tingkat bunga $i = j_m/m$ selalu digunakan dalam menghitung bunga majemuk.

Dengan menggunakan notasi dan definisi di atas, persamaan dan bunga majemuk dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S = P(1+i)^n \quad (13)$$

Faktor $(1 + i)^n$ disebut **faktor majemuk** (*compound factor*) dan proses penghitungan S dari P disebut **compounding** atau akumulasi atau **mencari nilai akan datang** (*future value*). Sementara itu, penghitungan P dan S disebut mencari **nilai sekarang** (*present value*).

- Contoh 5.2** Berapa nilai S dari P sebesar Rp 10.000.000 jika $j_{12} = 12\%$ selama:
- 5 tahun.
 - 25 tahun.



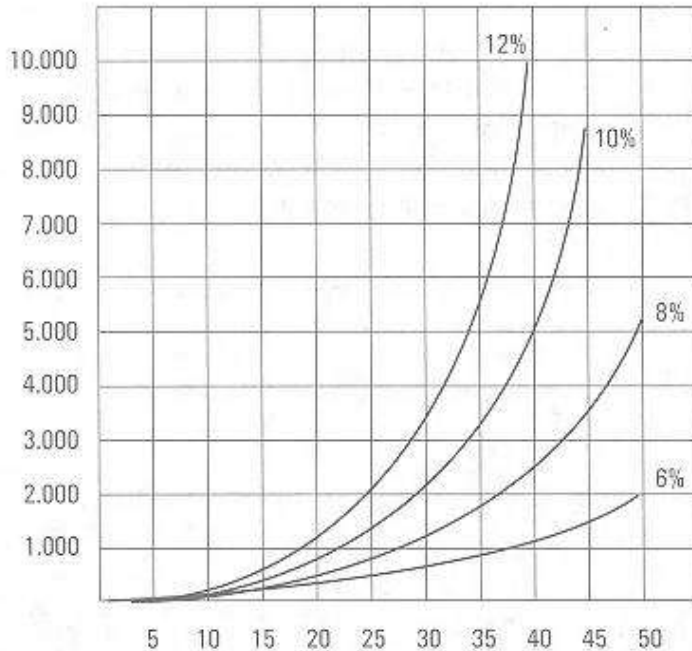
Jawab:

- $P = \text{Rp } 10.000.000$
- $i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0,01$

Tabel 5.1 Pertumbuhan Uang Rp100 pada Tingkat Bunga Majemuk j_{12}

Tahun	6%	8%	10%	12%
5	134,89	148,98	164,53	181,67
10	181,94	221,96	270,70	330,04
15	245,41	330,69	445,39	599,58
20	331,02	492,68	732,81	1.089,26
25	446,50	734,02	1.205,69	1.978,85

30	602,26	1.093,57	1.983,74	3.594,96
35	812,36	1.629,26	3.263,87	6.530,96
40	1.095,75	2.427,34	5.370,07	11.864,77
45	1.478,00	3.616,36	8.835,42	21.554,69
50	1.993,60	5.387,82	14.536,99	39.158,34



Grafik 5.2 Pertumbuhan Uang dengan Bunga Majemuk

c.

$$P = \text{Rp } 10.000.000$$

$$i = 1\% = 0,01$$

$$n = 25 \text{ tahun} \times 12 = 300 \text{ bulan}$$

$$S = P (1 + i)^n$$

$$= \text{Rp } 10.000.000 (1 + 0,01)^{300}$$

$$= \text{Rp } 197.884.662,6$$

Total bunga majemuk dari Rp 10.000,000 dengan $j_{12} = 12\%$ selama 25 tahun adalah Rp197.884.662.6 atau lebih dari 18 kali nilai pokok awal. Jika metode bunga sederhana yang digunakan, jumlah bunga hanya Rp 30.000.000 jauh di bawah hasil dengan bunga majemuk.

Contoh 5.3 Seorang karyawan menyimpan uangnya sebesar Rp 5.000.000 dalam sebuah bank yang memberikan bunga sebesar 12,25% diperhitungkan dan dikreditkan harian. *Berapa besarnya bunga yang dihasilkan selama:

a.. Tahun pertama.

b. Tahun kedua.

* Umumnya bunga tabungan dikreditkan bulanan bukan harian.

Jawab:

$$\mathbf{a. P} = \text{Rp } 5.000.000$$

$$I = \frac{0,1225}{365}$$

$$n = 365$$

$$I = S - P = P(1 + i)^n - P$$

$$= \text{Rp } 5.000.000 \left(1 + \left(\frac{0,1225}{365} \right) \right)^{365} - \text{Rp } 5.000.000$$

$$= \text{Rp } 651.479,37$$

$$\mathbf{b. P} = \text{Rp } 5.651.479,37$$

$$I = \frac{0,1225}{365}$$

$$n = 365$$

$$I = S - P = P(1 + i)^n - P$$

$$= \text{Rp } 5.651.479,37 \left(1 + \left(\frac{0,1225}{365} \right) \right)^{365} - \text{Rp } 5.651.479,37$$

$$= \text{Rp } 736.364,5$$

2. BUNGA EFEKTIF DAN BUNGA NOMINAL

Seperti kita ketahui bersama, bahwa tingkat bunga selalu dinyatakan per tahun atau per *annum* (p.a.). Tingkat bunga tahunan yang dinyatakan itu apakah diakhiri dengan p.a. atau tidak, disebut **tingkat bunga nominal**. Untuk setiap tingkat bunga nominal tertentu (j_m), kita mendapatkan **tingkat bunga efektif** yang ekuivalen, yaitu yang jika digandakan tahunan (j_1) memberikan besar bunga yang sama per tahun.

j_1 artinya periode perhitungan bunga adalah sekali setahun atau tahunan, j_2 artinya dua kali dalam setahun atau semesteran, j_3 artinya tiga kali dalam setahun atau kuartalan, j_4 triwulanan, j_{12} , bulanan, dan seterusnya.

Jika

$$i = j_m / m, \text{ maka } 1 + j_1 = (1 + i)^m$$

atau

$$j_1 = (1 + i)^m - 1$$

Contoh 5.4 Hitung tingkat bunga efektif j_1 yang ekuivalen dengan:

a. $j_2 = 10\%$

b. $j_{12} = 12\%$

c. $j_{365} = 13,25\%$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,1}{2}\right)\right)^2 - 1 \\ &= (1,05)^2 - 1 \\ &= 0,1025 \\ &= 10,25\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,12}{12}\right)\right)^{12} - 1 \\ &= (1,01)^{12} - 1 \\ &= 0,126825 \\ &= 12,68\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,1325}{365}\right)\right)^{365} - 1 \\ &= 1,14165 - 1 \\ &= 0,14165 \\ &= 14,17\% \end{aligned}$$

Contoh 5.5 Hitung j_4 yang ekuivalen dengan:

a. $j_{12} = 12\%$

b. $j_2 = 10\%$

Jawab:

$$a. (1+i)^4 = \left(1 + \left(\frac{0,12}{12}\right)\right)^{12}$$

$$\begin{aligned} i &= (1 + 0,1)^3 - 1 \\ &= 1,030301 - 1 \\ &= 0,030301 \end{aligned}$$

$$\text{maka } j_4 = 0,030301 \times 4 = 0,121204 = 12,12\%$$

$$a. (1+i)^4 = \left(1 + \left(\frac{0,1}{2}\right)\right)^2$$

$$\begin{aligned} i &= (1 + 0,05)^{1/2} - 1 \\ &= (1,024695) - 1 \\ &= 0,024695 \end{aligned}$$

$$\text{maka } j_4 = 0,024695 \times 4 = 0,09878 = 9,88\%$$

Contoh 5.6 Berapa tingkat bunga sederhana yang ekuivalen dengan $j_2 = 9\%$, jika uang disimpan selama tiga tahun?

Jawab: $1 + 3r = \left(1 + \left(\frac{0,1}{2}\right)\right)^2$

$$1 + 3r = 1,3022601$$

$$r = 0,1007533$$

$$= 10,08\%$$

3. MENGHITUNG NILAI SEKARANG

Sering kali kita diberikan nilai akhir (S), tingkat bunga (i), dan periode waktu (n); dan diminta untuk mencari atau menghitung nilai P , yaitu nilai sekarang (*present value*) atau nilai yang didiskontokan (*discounted value*) atau nilai pokok awal. Proses mencari P dari S ini disebut **pendiskontoan** (*discounting*). Dari Persamaan (13), kita dapat menuliskannya menjadi sebagai berikut:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S (1 + i)^{-n} \quad (14)$$

$$\text{atau yang lebih populer } PV = FV (1 + i)^{-n} \quad (15)$$



Faktor $(1 + i)$ ” dalam Persamaan (II) disebut faktor diskonto (*discount actor*).

Contoh 5.7 Dengan menggunakan $J_{12} = 12\%$, hitung nilai diskonto (*discounted value*) dari uang sejumlah Rp 100.000.000 yang jatuh tempo:

- a. 10 tahun lagi.
- b. 25 tahun lagi.

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } S &= \text{Rp } 100.000.000 \\ n &= 10 \text{ tahun} \times 12 = 120 \text{ bulan} \end{aligned}$$

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0,01$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{S}{(1+i)^n} \\ &= \frac{\text{Rp } 100.000.000}{(1+0,01)^{120}} \end{aligned}$$

$$= \text{Rp } 30.299.477,97$$

$$\text{b. } S = \text{Rp } 100.000.000$$

$$\begin{aligned} n &= 25 \text{ tahun} \times 12 \\ &= 300 \text{ bulan} \end{aligned}$$

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0,01$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{S}{(1+i)^n} \\ &= \frac{\text{Rp } 100.000.000}{(1+0,01)^{300}} \end{aligned}$$

$$= \text{Rp } 5.053.448,75$$

Perhatikan bahwa sebaiknya pembulatan dalam menglutung $(1,01)^{120}$ dan $(1,01)^{300}$ tidak dilakukan karena bukan merupakan hasil akhir. Kalaupun dilakukan pembulatan, usahakan sampai beberapa angka desimal untuk angka yang belum alau bukan merupakan hasil akhir dan cukup dua angka desimal untuk hasil akhir seperti contoh di atas.

Contoh 5.8 Pada tanggal 1 Januari 2010, sebidang tanah ditawarkan pada harga Rp180.000.000 secara tunai atau dengan membayar Rp 100.000.000 hari ini

ditambah Rp50.000.000 satu tahun lagi dan Rp50.000.000 dua tahun lagi. Jika diketahui $j_1 = 16\%$, alternatif pembayaran mana yang sebaiknya dipilih pembeli?

Jawab:

Untuk menjawab soal ini, kita akan menghitung total nilai sekarang dan alternatif kedua kemudian membandingkannya dengan alternatif pertama. Pembeli tentunya akan memilih alternatif dengan harga yang lebih rendah. Nilai sekarang dari alternatif pertama adalah Rp 180.000.000. Nilai sekarang dari alternatif kedua adalah:

$$= \text{Rp } 100.000.000 + \text{Rp } 50.000.000 (1,16)^{-1} + \text{Rp } 30.000.000 (1,16)^{-2}$$

$$= \text{Rp } 100.000.000 + \text{Rp } 43.103.448 + \text{Rp } 37.158.145$$

$$= \text{Rp } 180.261.593$$

Alternatif kedua lebih mahal Rp 261.593 dibandingkan alternatif pertama. Oleh karena itu, pembeli sebaiknya memilih alternatif pertama.

4. MENGHITUNG TINGKAT BUNGA DAN JUMLAH PERIODE

Dengan menurunkan Persamaan (13), kita pun dapat mencari tingkat bunga (i), jika diketahui P , S , dan n :

$$P(1+i)^n = S$$

$$(1+i)^n = \frac{S}{P}$$

$$(1+i) = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Contoh 5.9 Berapa tingkat bunga j_2 yang dapat membuat sejumlah uang menjadi tiga kali lipat dalam 12 tahun?

Jawab:

Kita asumsikan uang tersebut sebagai x .

$$n = 12 \times 12 = 144$$

Maka:

$$x(1+i)^{144} = 3x$$

$$(1+i) = (3)^{1/144}$$

$$i = (3)^{1/144} - 1$$

$$= 0,00765843$$

$$\begin{aligned}
 j_{12} &= 12 \times i \\
 &= 12 \times 0,00765843 = 0,09190114 \\
 &= 9,19\%
 \end{aligned}$$

Persoalan di atas juga dapat kita selesaikan dengan menggunakan logarilma sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 (1+i)^{144} &= 3 \\
 \log(1+i)^{144} &= \log 3 \\
 144 \log(1+i) &= \log 3 \\
 144 \log(1+i) &= 0,047712125 \\
 \log(1+i) &= 0,00331334 \\
 (1+i) &= 1,00765843 \\
 i &= 0,00765843
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j_{12} &= 12 \times i \\
 &= 12 \times 0,00765843 = 0,09190114 \\
 &= 9,19\%
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, kita juga dapat menurunkan persamaan untuk mencari jumlah periode (n):

$$\begin{aligned}
 P(1+i)^n &= S \\
 (1+i)^n &= \frac{S}{P} \\
 \log(1+i)^n &= \log \frac{S}{P} \\
 n \log(1+i) &= \log \frac{S}{P} \\
 n &= \frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+i)}
 \end{aligned}$$

Contoh 5.10 Berapa lama waktu yang diperlukan untuk membuat uang sebesar Rp5.000.000 menjadi Rp5.500.000 dengan $j_{12} = 12\%$?

Jawab:

$$P = \text{Rp } 5\,000.000$$

$$S = \text{Rp } 8.500.000$$

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0,01$$

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1+i)} \\
 &= \frac{\log \frac{\text{Rp } 8.500.000}{\text{Rp } 5.000.000}}{\log(1+0,01)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\log 1,7}{\log 1,01}$$

atau

$$n = 4 \text{ tahun } 5 \text{ bulan } 10 \text{ hari} \approx 4 \text{ tahun } 6 \text{ bulan}$$

(ingat: bunga dihitung setiap hulan)

5. ATURAN 72

Berhubungan dengan jumlah periode, yang sering ingin diketahui adalah berapa lama waktu yang diperlukan untuk membuat sejumlah uang menjadi dobel alias dua kalinya jika diinvestasikan dalam produk keuangan yang memberikan tingkat pengembalian tertentu. Secara akurat, kita dapat menggunakan persamaan (17) untuk menghitung jumlah periode ini, yaitu:

$$n = \frac{\log 2}{\log(1+i)}$$

Sebagai alternatif, kita sebenarnya mempunyai aturan praktis (*rule of thumb*) yang dapat memberikan hasil yang tidak jauh berbeda. Aturan itu disebut aturan 72, yang menyatakan hasil kali *return* periodik dan jumlah periode untuk membuat nilai awal menjadi dua kali lipat adalah selalu 72.

P menjadi 2P jika dan hanya jika $i \times n = 72$

$$P \text{ menjadi } 2P \Leftrightarrow i \times n = 72 \quad (18)$$

$$\text{atau } n = \frac{72}{i}$$

$$\text{atau } i = \frac{72}{n}$$

Jika diketahui tingkat bunga hersh deposito adalah 8%, maka diperlukan 9 tahun untuk membuat nilai awal (P) menjadi dua kali lipat (2P). Jika seorang investor ingin portofolionya berlipat dua dalam 6 tahun maka *return* tahunan yang harus diperolehnya adalah 12% p.a.

5.6 CONTINUOUS COMPOUNDING

Bunga nominal 12% per tahun akan memberikan bunga efektif (sebesar 12,68% (**Contoh 5.4b** halaman 106) per tahun apabila periode perhitungan bunga adalah bulanan (*monthly compounding*) dan akan menjadi lebih besar lagi untuk periode perhitungan lebih pendek dan sebulan seperti dua mingguan, mingguan, dan harian. Bagaimana jika periode perhitungan menjadi lebih pendek lagi dari harian, katakan per menit atau bahkan per detik, seperti pertumbuhan penduduk penyebaran penderita penyakit yang belum ditemukan obatnya,

dan pertumbuhan pemakai narkoba jika tidak dikenakan sanksi berat? Dalam kasus-kasus tersebut, sebenarnya kita masih dapat menggunakan persamaan bunga majemuk (*compound interest*) biasa, yaitu $S = P (1 + i)^t$ atau $FV = PV(1 + i)^n$. Akan tetapi, dengan i atau r mendekati 0 (nol) dan n mendekati tidak terhingga (∞), persamaan tersebut akan menjadi persamaan kontinu, yaitu

$$S = Pe^{rt}$$

atau

$$FV = PVe^{rt} \tag{19}$$

Di dalam bab 4, kita sudah membahas bahwa untuk periode waktu tertentu (t), kita dapat menghitung tingkat diskon (d) yang ekuivalen dengan tingkat bunga (r) tertentu, dan sebaliknya. Demikian juga dengan hubungan antara tingkat bunga kontinu (r) dan tingkat bunga diskrit (i). Kita juga dapat mencari r yang ekuivalen dengan i tertentu dan i yang ekuivalen dengan r tertentu. Tidak seperti persamaan yang menghubungkan d dan r di dalam bab 4 yang bergantung pada periode t persamaan ini berlaku untuk semua periode t .

$$FV = PV (1 + i)^n = PV(1 + i)^t = PVe^{rt}$$

$$(1 + i)^t = e^{rt}$$

$$\ln(1 + i)^t = \ln e^{rt}$$

$$r = \ln(1 + i)$$

$$(1 + i)^t = e^{rt}$$

$$(1 + i) = e^r$$

$$i = e^r - 1$$

Contoh 5.11 Berapakah tingkat bunga kontinu (r) yang ekuivalen dengan tingkat bunga diskrit (i) 10% p.a.?

Jawab:

$$r = \ln(1 + i)$$

$$r = \ln(1 + 10\%)$$

$$r = 9,53\%$$

Contoh 5.12 Hitunglah i yang ekuivalen dengan $r = 12\%$ pa.?

Jawab:

$$i = e^r - 1$$

$$i = e^{12\%} - 1$$

$$i = 12,75\%$$

Contoh 5.13 Sebuah deposito sebesar Rp 10.000.000 dapat memberikan pendapatan bunga sebesar Rp5.600.000 selama 36 bulan. Hitung tingkat bunga nominal tahunannya apabila:

a. Perhitungan bunga tahunan

b. *Continuous compounding*

Jawab:

$$a.S = \text{Rp } 15.600.000$$

$$P = \text{Rp } 10.000.000$$

$$t = 3$$

$$S = P(1 + i)^n$$

$$\text{Rp}15.600.000 = \text{Rp } 10.000.000 (1 + i)^3$$

$$1,56 = (1 + i)^3$$

$$i = \sqrt[3]{1,56 - 1}$$

$$i = 0,159778$$

$$= 15,98\%$$

$$b.S = \text{Rp } 15.600.000$$

$$P = \text{Rp } 10.000.000$$

$$t = 3$$

$$S = Pe^{rt}$$

$$\text{Rp } 15.600.000 = \text{Rp } 10.000.000 e^{rt}$$

$$1,56 = e^{rt}$$

$$\ln 1,56 = \ln e^{rt}$$

$$0,444685821 = 3r$$

$$r = 0,148228607$$

$$= 14,82\%$$

LATIHAN DAN PENYELESAIAN BAB 5

1. Hitung tingkat bunga j_1 yang ekuivalen dengan:

a. $j_2 = 12\%$

b. $j_4 = 18\%$

c. $j_{12} = 15\%$

d. $j_{26} = 13\%$

e. $j_{52} = 18\%$

f. $j_{365} = 24\%$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,12}{2}\right)\right)^2 - 1 \\ &= (1,06)^2 - 1 \\ &= 0,1236 \\ &= 12,36\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,18}{4}\right)\right)^4 - 1 \\ &= (1,045)^4 - 1 \\ &= 0,1925186018 \\ &= 19,25\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,15}{12}\right)\right)^{12} - 1 \\ &= (1,0125)^{12} - 1 \\ &= 0,160754518 \\ &= 16,08\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,13}{26}\right)\right)^{26} - 1 \\ &= (1,005)^{26} - 1 \\ &= 0,138459553 \\ &= 13,85\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,18}{52}\right)\right)^{52} - 1 \\
 &= (1,003461539)^{52} - 1 \\
 &= 0,1968453 \\
 &= 19,68\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f. } j_1 &= \left(1 + \left(\frac{0,24}{365}\right)\right)^{365} - 1 \\
 &= (1,000657534)^{365} - 1 \\
 &= 0,271148893 \\
 &= 27,11\%
 \end{aligned}$$

2. Pak Thomas menabung Rp 2.000.000 selama 5 tahun dengan bunga 12% p.a. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, hitung besar bunganya dan bandingkan dengan bunga sederhana yang dihasilkan.

Jawab:

Perhitungan bunga majemuk:

$$\begin{aligned}
 P &= \text{Rp}2.000.000 \\
 i &= \frac{12\%}{4} = 3\% = 0,03 \\
 n &= 5 \times 4 \text{ periode per tahun} = 20 \text{ periode} \\
 S &= P(1+i)^n \\
 &= \text{Rp}2.000.000(1+0,03)^{20} \\
 &= \text{Rp}3.612.222,47 \\
 \text{Bunga} &= \text{Rp}3.612.222,47 - \text{Rp}2.000.000 \\
 &= \text{Rp}1.612.222,47
 \end{aligned}$$

Akumulasi tabungan setiap periode:

Periode	Pokok (Rp)	Bunga (Rp)	Saldo Akhir (Rp)
1	2.000.000,00	60.000,00	2.060.000,00
2	2.060.000,00	61.800,00	2.121.800,00
3	2.121.800,00	63.654,00	2.185.454,00
4	2.185.454,00	65.563,62	2.251.017,62
5	2.251.017,62	67.530,53	2.318.548,15
6	2.318.548,15	69.556,44	2.388.104,59
7	2.388.104,59	71.643,14	2.459.747,73
8	2.459.747,73	73.792,43	2.533.540,16
9	2.533.540,16	76.006,20	2.609.546,37
10	2.609.546,37	78.286,39	2.687.832,76
11	2.687.832,76	80.634,98	2.768.467,74
12	2.768.467,74	83.054,03	2.851.521,77
13	2.851.521,77	85.545,65	2.937.067,43
14	2.937.067,43	88.112,02	3.025.179,45
15	3.025.179,45	90.755,38	3.115.934,83
16	3.115.934,83	93.478,04	3.209.412,88
17	3.209.412,88	96.282,39	3.305.695,26
18	3.305.695,26	99.170,86	3.404.866,12
19	3.404.866,12	102.145,98	3.507.012,11
20	3.507.012,11	105.210,36	3.612.222,47

Jadi, total bunga sampai akhir tahun ke-5 adalah:

$$= \text{Rp}3.612.222,47 - \text{Rp} 2.000.000$$

$$= \text{Rp}1.612.222,47$$

Perhitungan bunga sederhana:

$$\begin{aligned} SI &= P r t \\ &= \text{Rp}2.000.000 \times 12\% \times 5 \\ &= \text{Rp}1.200.000 \end{aligned}$$

Jadi, total bunga sampai akhir tahun ke-5 Rp 1.200.000, Terdapat selisih sebesar Rp 412.222,47, yaitu dari Rp 1.612.222,47 – Rp 1.200.000 dengan bunga majemuk.

3. Berapa nilai S dan $P = \text{Rp } 1.000.000$ dengan tingkat bunga $j_2 = 18\%$ selama 5 tahun?

Jawab:

$$\begin{aligned}P &= \text{Rp}1.000.000 \\i &= \frac{18\%}{2} = 9\% = 0,09 \\n &= 5 \text{ tahun} \times 2 = 10 \text{ periode} \\S &= P (1 + i)^n \\&= \text{Rp}1.000.000 (1 + 0,09)^{10} \\&= \text{Rp}1.000.000 (2,367363675) \\&= \text{Rp}2.367.363,675\end{aligned}$$

4. Berapa nilai P yang membuat $S = \text{Rp } 100.000.000$ dengan tingkat bunga $j_4 = 12\%$ selama 6 tahun?

Jawab:

$$\begin{aligned}S &= \text{Rp}100.000.000 \\i &= \frac{12\%}{4} = 3\% = 0,03 \\n &= 6 \text{ tahun} \times 4 = 24 \text{ periode} \\S &= P (1 + i)^n \\ \text{Rp}100.000.000 &= P (1 + 0,03)^{24} \\ \text{Rp}100.000.000 &= P (2,032794106) \\P &= \text{Rp}49.193.373,65\end{aligned}$$

5. Tuan Tino menyimpan uangnya sebesar $\text{Rp } 5.000.000$ dalam sebuah bank yang memberikan bunga sebesar 18% per tahun, bunga dihitung bulanan. Berapa besarnya bunga yang dihasilkan selama tahun pertama?

Jawab:

$$\begin{aligned}P &= \text{Rp}5.000.000 \\i &= \frac{18\%}{12} = 1,5\% = 0,015 \\n &= 12 \text{ periode} \\S &= P (1 + i)^n \\&= \text{Rp}5.000.000 (1 + 0,015)^{12} \\&= \text{Rp}5.000.000 (1,195618171) \\S &= \text{Rp}5.978.090,857 \\I &= S - P \\&= \text{Rp}5.978.090,857 - \text{Rp}5.000.000 \\&= \text{Rp}978.090,857\end{aligned}$$

6. Bapak Abdul berniat menghadiahkan anaknya uang sejumlah $\text{Rp } 20.000.000$ pada ulang tahun anaknya ke-21. Untuk itu, ia menyimpan $\text{Rp } 5.000.000$ dengan tingkat bunga 12% p.a. yang

dihitung bulanan. Berapa lama ia harus menyimpan uang tersebut sebelum har ulang tahun anaknya?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}20.000.000 \\ P &= \text{Rp}5.000.000 \\ i &= \frac{12\%}{12} = 1\% = 0,01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log \frac{S}{P}}{\log (1+i)} \\ n &= \frac{\log \left(\frac{20.000.000}{5.000.000} \right)}{\log (1+0,01)} \\ &= \frac{\log 4}{\log 1,01} \end{aligned}$$

7. Berapa tingkat bunga nominal j_4 per tahun yang dapat membuat Rp 10.000.000 menjadi Rp30.000.000 dalam 4 tahun?

Jawab:

$$\begin{aligned} P &= \text{Rp}10.000.000 \\ S &= \text{Rp}30.000.000 = 3 (\text{Rp}10.000.000) = 3P \\ n &= 4 \text{ tahun} \times 4 = 16 \text{ periode} \\ S &= P (1+i)^n \\ 3P &= P (1+i)^{16} \\ 3 &= (1+i)^{16} \\ i &= 0,071075483 \text{ per tiga bulan} \\ &= 0,071075483 \times 4 \text{ per tahun} \\ &= 0,284301932 \text{ p.a. atau } j_4 = 28,43\% \end{aligned}$$

8. Sebuah wesel tanpa bunga bernilai nominal Rp30.000.000 akan jatuh tempo pada tanggal 1 Agustus 2010. Pada tanggal 1 Juni 2010, pemegang dari wesel itu mendiskontokan wesel tersebut pada bank yang menggunakan tingkat bunga $j_{12} = 12\%$. Berapa hasil dari pendiskontoan wesel tersebut?

Jawab:

$$\begin{aligned} S &= \text{Rp}30.000.000 \\ i &= 1\% = 0,01 \\ t &= 2 \\ P &= \text{Rp}30.000.000 (1,01)^{-2} \\ &= \text{Rp}29.408.881,48 \end{aligned}$$

9. Berapa lama waktu yang diperlukan untuk membuat uang Rp 10.000.000 menjadi Rp 25.000.000 dengan $j_4 = 12\%$?

Jawab:

$$\begin{aligned}
 S &= \text{Rp}25.000.000 \\
 P &= \text{Rp}10.000.000 \\
 i &= \frac{12\%}{4} = 3\% = 0,03 \\
 n &= \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log(1+i)} \\
 &= \frac{\log\left(\frac{\text{Rp}25.000.000}{\text{Rp}10.000.000}\right)}{\log(1+0,03)} \\
 &= \frac{\log 2,5}{\log 1,03} \\
 &= 31 \text{ periode atau 7 tahun 9 bulan}
 \end{aligned}$$

10. Jika penduduk desa **Tentram** adalah 216.000 jiwa pada tahun 2006 dan pada tahun 2016 adalah 214.000 jiwa, hitung:

- tingkat pertumbuhan **penduduk desa** itu selama 10 tahun itu?
- dengan **tingkat** pertumbuhan **tersebut**, **apan jumlah** penduduk desa Tentram mencapai **300.000** jiwa? Asumsi *discrete compounding* tahunan.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } 216.000 (1+i)^{10} &= 244.000 \\
 (1+i)^{10} &= \frac{244.000}{216.000} \\
 i &= (1,12962963)^{1/10} - 1 \\
 &= 1,01226357 - 1 \\
 &= 1,23\% \\
 \\
 \text{b. } 244.000 (1,0123)^t &= 300.000 \\
 (1,0123)^t &= \frac{300.000}{244.000} \\
 t &= 16,9 \text{ tahun}
 \end{aligned}$$

SOAL BAB 3

1. Pada ulang tahun ke-20, Trinita memperoleh hadiah uang sebesar Rp 10.000.000 sebagai hasil dari tabungan ayahnya semenjak Trinita dilahirkan, berapa besarnya uang yang ditabungkan ayahnya pada saat ia lahir jika tingkat bunga tabungan tidak berubah, yaitu $j_2 = 6\%$?
2. Pak Sofyan ditawarkan seorang temannya untuk membeli sebidang tanah secara tunai dengan harga Rp 70.000.000 atau membelinya secara kredit dengan membayar uang muka sebesar Rp 20.000.000 dan mencicil Rp 12.000.000 setiap tahun selama 5 tahun. Jika tingkat bunga yang berlaku adalah $j_{365} = 16\%$, tawaran mana yang lebih menguntungkan Pak Sofyan?
3. Seorang Bapak meninggalkan uang warisan sebesar Rp 50.000.000 untuk diberikan kepada dua orang anaknya yang ia simpan di bank yang memberikan bunga $j_{12} = 9\%$. Pada saat kematiannya, kedua anaknya berumur 13 tahun dan 18 tahun. Kedua anak tersebut memiliki jumlah warisan yang sama besar ketika mereka masing-masing berumur 21 tahun. Berapa jumlah yang diperoleh masing-masing anak saat pembagian warisan?
4. Seorang pedagang membeli barang seharga Rp 1.500.000. Ia membayarnya dengan uang muka Rp 300.000 dan membayar Rp 500.000 di akhir bulan ke 6. Apabila pihak toko membungakan $j_{12} = 18\%$ untuk sisa yang belum ia bayarkan, berapa saldo yang terutang pada akhir tahun pertama?
5. Pada tahun 2010, penderita penyakit HIV/AIDS adalah 220.000 orang. Jika tingkat pertumbuhan penderita per tahun adalah 30%, berapa jumlah penderita pada tahun 2020? Gunakan *continuous compounding*.
6. Pada awal tahun **2013, Xenia mendapat hadiah undian** sebesar Rp 25.000.000 dari sebuah **bank**. Uang itu kemudian diinvestasikan **dalam reksa** dana yang **memberikan bunga 12% p.a. dihitung bulanan**. **Xenia mengharapkan** investasinya menjadi **Rp100.000.000** pada akhir tahun 2020. Untuk mencapai jumlah itu, ia bersedia untuk menambah investasinya pada awal tahun 2015 sebesar Rp 5.000.000 dan sekali lagi

pada awal tahun 2017. Berapa tambahan investasi yang harus ia lakukan pada awal tahun 2017 untuk memenuhi harapannya?

7. Untuk melunasi pinjamannya sebesar Rp 50.000.000 (tingkat bunga $j_{12} = 15\%$) Paul setuju untuk mencicilnya tiga kali, yaitu pada akhir bulan ke-2, akhir bulan ke-5, dan akhir bulan ke-10. Besarnya pembayaran ke-2 adalah **dua** kali besarnya pembayaran pertama dan besarnya pembayaran ke-3 sama dengan tiga kali besarnya pembayaran pertama. Berapa besarnya masing-masing pembayaran tersebut?

8. Populasi penduduk di Kanada pada tahun 2005 adalah 21.600.000 jiwa. Pada tahun 2010 populasinya mencapai 24.400.000 jiwa.
 - a. Berapa besarnya tingkat pertumbuhan penduduk selama 5 tahun tersebut?
 - b. Menyambung pertanyaan a, pada tahun berapa penduduk di Kanada mencapai 30.000.000 jiwa?

9. Anda ditawarkan 1 lot kepemilikan saham PT Barulah dengan pilihan sebagai berikut:
 - a. Membayar secara tunai Rp 18.000.000.
 - b. Membayar secara tunai Rp 10.000.000 sebagai tanda jadi dan kemudian membayar Rp 5.000.000 masing-masing di tahun ke- 1 dan tahun ke-2, dengan bunga 16% dihitung bulanan.Manakah pilihan yang lebih menguntungkan untuk Anda? Mengapa?

10. Frans sekarang menginvestasikan uang sebanyak Rp 50.000.000 dengan tingkat bunga 24% per tahun yang dihitung bulanan.
 - a. Berapa besarnya uang Frans bila ia hendak mengambilnya pada:
 - 1.) akhir tahun pertama;
 - 2.) akhir tahun kedua;
 - 3.) akhir tahun ketiga.
 - b. Apabila Frans ingin uangnya menjadi Rp 150.000.000, berapa lama ia harus menunggu?
 - c. Apabila uang tersebut ia depositokan dengan bunga majemuk yang dihitung bulanan selama 3 tahun, Ia akan memperoleh Rp 130.000.000. Berapa tingkat bunga yang diberikan deposito tersebut?

Referensi :

Ayres, F.J.R dan Schmidt, P.A. 2004. Schaum's Outline Matematika Universitas. Erlangga. Jakarta.

Dumairy, 2004. Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi. BPFE. Yogyakarta.

Frensidy, B. 2008. *Matematika Keuangan*. Salemba Empat. Jakarta

Kalangi, J.B. 2006. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Salemba Empat. Jakarta.

Yuana, R. A. 2009. Khazanah Matematika 3 : untuk Kelas XII SMA / MA Program Ilmu Pengetahuan. Sosial. Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta. p. 240.